3-1

व्यक्तगणित

व्यक्तगणित।

पहिला भाग

बहुत उदाहरणों से युक्त

बनारस के राजकीय संस्कृत पाठशाला में
गणित और ज्योतिःशास्त्र के
अध्यापक
श्रीबापूदेव शास्त्री ने
बनाया।

ELEMENTS OF ARITHMETIC,

FIRST PART,

WITH NUMEROUS EXAMPLES

BY

PANDITA BAPU DEVA ŚASTRI,

PROFESSOR OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY IN THE SANSKRIT COLLEGE, BENARES, HONORARY MEMBER OF THE ROYAL ASIATIC SOCIETY OF GREAT BRITAIN AND IRELAND, HONORARY MEMBER OF THE ASIATIC SOCIETY OF BENGAL AND FELLOW OF THE CALCUTTA UNIVERSITY.

BENARES:

PRINTED AT THE MEDICAL HALL, PRESS

1875.

पहिले भाग के हर एक पुस्तक का मोल दस पैसे है।

व्यक्तगणित ।

पहिला भाग

बहुत उदाहरणों से युक्त

बनारस के राजकीय संस्कृत पाठशाला में
गणित और ज्योतिःशास्त्र के
अध्यापक
श्रीबापूदेव शास्त्री ने
बनाया ।

ELEMENTS OF ARITHMETIC,

FIRST PART,

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

PANḌITA BÁPU' DEVA ŚÁSTRI',

PROFESSOR OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY IN THE SANSKRIT COLLEGE,
BENARES, HONORARY MEMBER OF THE ROYAL ASIATIC SOCIETY
OF GREAT BRITAIN AND IRELAND, HONORARY MEMBER OF
THE ASIATIC SOCIETY OF BENGAL AND FELLOW
OF THE CALCUTTA UNIVERSITY.

BENARES:

PRINTED AT THE MEDICAL HALL PRESS.

1875.

PREFACE.

The method of calculating about ordinary numbers, one, two, three, &c., is called Arithmetic. The whole Arithmetical calculation consists in joining or disjoining numbers. It is clear that all Arithmetical calculation can be made by means of the following six fundamental Rules i. e. Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Involution and Evolution. In all these operations, there is nothing but the joining or disjoining of numbers. In Addition we join, in Subtraction we disjoin numbers. Multiplication is the adding of the same quantity a given number of times and consequently is a process of joining. In a process of Division, we subtract the division from the dividend as many times as is indicated by the quotient, and consequently disjoin numbers. Involution is a kind of Multiplication and Evolution a kind of Division and consequently are processes of joining and disjoining. Thus all calculations about numbers have been reduced to the processes of joining or disjoining numbers. Mathematicians having invented new and simple methods for peculiar kinds of adding or subtracting have embodied them into distinct Rules and given the name of Arithmetic to the whole.

No good book in Hindí has hitherto been published on Arithmetic. With this view of the case before him, M. Kempson Esquire, M. A., the Director of Public Instruction, N. W. Provinces, desired me to prepare a new Treatise on Arithmetic which should contain the Rules together with reasons and numerous examples for exercise.

The book in hand has been got out at his special request. All ordinary Rules of Arithmetic have been given in this book together with reasons which do not follow any strict Algebraical method, and numerous examples have been added for exercise which will be found to be entirely new. Examples have not been taken from any English or Hindí book.

Where, in Decimal Fractions, both the Multiplier and the Multiplicand are recurring, the Rule for Multiplication in ordinary Arithmetics is, to reduce both the decimals into their corresponding vulgar fractions and then reduce the product thus gained again into a decimal. But I have shewn the reader a way by which he can multiply two recurring decimals without first reducing them to their corresponding vulgar fractions. Thus, this book contains, in many places, more special matter than several other books.

This book is made up of six Chapters. The first Chapter contains the Doctrine of whole numbers; the second, the Rules for finding the Greatest Common Measure and Least Common Multiple of numbers. The third developes The Theory of Vulgar Fractions. The fourth treats of Decimals and the fifth and sixth Chapters contain Commercial Arithmetic.

BENARES SANSKRIT COLLEGE,

BÁPU DEVA SÁSTRI.

May 1875.

भूमिका ।

जिस में एक, दो, तीन इत्यादि व्यक्त अर्थात् प्रसिद्ध संख्याओं की गणना करने के प्रकार लिखे रहते हैं उस को व्यक्त-गणित कहते हैं। उस में संख्याओं की गणना अर्थात् गणित करना यह वस्तुत: केवल संख्याओं का संयोग करना अर्थात् उन को इकट्ठा करना वा उन का वियोग करना अर्थात् उन को अलग करना इतनी हि क्रिया है। व्यक्तगणित में जितने संख्याओं का गणित करने के प्रकार लिखे रहते हैं वे सब संकलन, व्यवकलन, गुणन, भागहार, घातक्रिया और मूलक्रिया इन्हीं छ परिकर्मों से बनते हैं यह स्पष्ट हि है। उस में इन छओं से भी केवल संख्याओं का संयोग वा वियोग मात्र होता है इस के अतिरिक्त और कुछ नहीं है। जैसा। संकलन में संख्याओं का संयोग होता है व्यवकलन में वियोग होता है यह स्पष्ट है। गुणन में समान अर्थात् एकरूप अनेक संख्याओं का संकलन होता है इस लिये उस में संख्याओं का संयोग हि होता है। भागहार में भाज्य में जितनी बार भाजक घटे उतनी बारसंख्या लब्धि अर्थात् भजनफल है यों भागहार व्यवकलन से बनता है इस में संख्याओं का वियोग होता है। और घातक्रिया एक गुणन का विशेष है और मूलक्रिया एक भाग-हार का विशेष है इस लिये इन दोनों में भी क्रम से संख्याओं का संयोग और वियोग होता है। इस प्रकार से समग्र संख्याओं की गणना केवल उन का संयोग वा वियोग करना है और कुछ नहीं। उस में बुद्धिमान् लोगों ने उन संयोग और वियोग करने के विशेषों को सुगम करके उन विशेषों के अलग २ नाम रख के उन का एकत्र संग्रह किया। इसी संग्रह का नाम व्यक्तगणित रक्खा।

इस व्यक्तगणित पर हिन्दी भाषा में कोइ अच्छा ग्रन्थ बना हुआ नहीं है यह जान के हमारे पश्चिमोत्तर देश की शालाओं के अध्यक्ष श्रीयुत केम्पसन साहिब ने मेरे से कहा कि हिन्दी में एक व्यक्तगणित का ग्रन्थ ऐसा बड़ा बनना चाहिये कि जिस में सब विधि उपपत्ति समेत रहें और उस में उदाहरण भी बहुत होवें तब मैनें उन की इच्छा के अनुसार व्यक्तगणित का ग्रन्थ बनाया। इस में प्राय: गणित के सब विधि लिखे हैं और उन सब विधिओं की उपपत्ति भी इस प्रकार से लिखी हैं कि किसी में बीजगणित की अपेक्षा न हो और हरएक विधि पर बहोत उदाहरण सब नये बना के लिखे हैं। उन में कोइ एक भी उदाहरण किसी अंग्रेजी वा और हिन्दी पुस्तक में से लेके नहीं लिखा है।

दशमलवों के गुणन में जो गुण्य और गुणक दोनों आवर्त हों तो उन के गुणनफल के लिये प्राय: और ग्रन्थों में ऐसा विधि लिखा है कि 'आवर्त गुण्यगुणकों को साधारण भिन्न संख्या का रूप देओ और तब उन का गुणनफल कर के उस फल को दशमलव का रूप देओ'। परंतु मैनें इस में आवर्त गुण्यगुणकों को साधारण भिन्न संख्या का रूप न देके भी उन्ही से उन का गुणनफल जानने का एक प्रकार दिखलाया है। और इसी प्रकार से मैनें इस में और ग्रन्थों की अपेक्षा से बीच २ में बहुत विशेष लिखे हैं।

इस में छ अध्याय हैं। उन में पहिले अध्याय में अभिन्न संख्याओं का गणित, दूसरे में उन का महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य, तीसरे में भिन्न संख्याओं का गणित, चौथे में दशमलवों का गणित और पांचवे और छठवे अध्याय में वाणिज्य गणित है।

बनारस संस्कृत पाठशाला
मे मास, सन् १८७५।

बापूदेवशास्त्री।

॥ अनुक्रमणिका ॥

अध्याय १

पृष्ठाङ्क

संख्याव्युत्पादन १
अभिन्न संख्याओं का संकलन १४
... ...व्यकलन २२
... ...गुणन २९
... ...भागहार ४३
... ...घातक्रिया ६८
... ...मूलक्रिया ७९
प्रकीर्णक ८६

अध्याय २

महत्समापवर्त्तन ९८
लघुतमापवर्त्य १०६

यच्छक्त्या ब्रह्माण्डान्तर्गतगोला मिथः समाकृष्टाः ।
सर्वे भ्रमन्ति नियतं नित्यं तद्विजयते तेजः ॥ १ ॥
विदेशिजनरीत्येदं सद्व्यक्तगणितं स्फुटम् ।
बापूदेवाभिधो देशभाषया वक्तुमुद्यतः ॥ २ ॥

व्यक्तगणित ।

अध्याय १

अभिन्नगणित ।

इस में संख्याव्युत्पादन, संकलन, व्यवकलन, गुणन, भागहार, घातक्रिया, मूलक्रिया और प्रकीर्णक इतने प्रकरण हैं ।

१ संख्याव्युत्पादन ।

प्रक्रम १ । जो पदार्थ उस के सजातीय और पदार्थों को छोड़ के अपेक्षित है उस को एक यह विशेषण लगाते हैं । जैसा । एक मनुष्य, एक हाथी इत्यादि । उस पदार्थ का जो एकत्व धर्म है उस को भी बोली में एक हि कहते हैं ।

२ । एकत्व और उस के समूह को संख्या कहते हैं । जैसा । एक और एक मिलके दो । एक, एक और एक मिलके तीन । इसी भांति चार, पांच इत्यादि जानो ।

३ । जिन पदार्थों की संख्या कहनी हो उन को और उन की संख्या को बोली में संख्या हीं के नाम से बोलते हैं । जैसा तीन मनुष्य । इस में मनुष्यों की संख्या का भी नाम तीन और मनुष्य भी तीन । इसी भांति बोली में संख्या और संख्येय अर्थात् जिन की संख्या करनी वा कहनी है उन की समान ही संज्ञा है ।

४ । संख्याओं की गणना करने की विद्या को व्यक्तगणित कहते हैं ।

५ । संख्याओं की गणना करने के लिये पहिले सब संख्याओं की अलग २ संज्ञा ठहरा के फिर उनके द्योतक अर्थात् दिखलाने हारे अङ्क कहिये चिह्न कल्पना करके उन अङ्कों के द्वारा उन संख्याओं का बोध करना अति आवश्यक है । इस के बिना गणित का निर्वाह न होगा । परंतु जो हर एक संख्या के लिये अलग २ संज्ञा ठहराई जावे और उन के लिये अलग २ अङ्कों की कल्पना किई जावे तो संख्या अनन्त हैं तब उनकी अनन्त संज्ञा और अनन्त अङ्कों का ठहराना अशक्य हि है फिर उन सभों की उपस्थिति रख के उन से गणित का निर्वाह करना तो परम अशक्य है । इस लिये पूर्व लोगों ने संख्याओं की संज्ञाओं का एक अनुगम ठहराया है । सो ऐसा कि पहिली संख्या का नाम एक रख के उस में एक २ जोड़ते जाने से जो सख्या होंगी उन की क्रम से दो, तीन चार, पांच, छ, सात, आठ, नौ, और दस इतनी अलग २ संज्ञा ठहराई* । फिर दस में और दस बार एक २ जोड़ने से जो संख्या होंगी उन की क्रम से ग्यारह, बारह इत्यादि बीस तक संज्ञा रक्खी फिर इसी क्रम से बीस के आगे इक्कीस, बाईस इत्यादि तीस तक संज्ञा किई फिर

तीस	...	इकतीस,	बत्तीस	...	चालीस ...
चालीस	...	इकतालीस,	बयालीस		पचास ...
पचास	...	ईक्यावन,	बावन	...	साठ ...
साठ	...	इकसठ,	बासठ	...	सत्तर ...
सत्तर	...	इकहत्तर,	बाहत्तर	...	अस्सी ...
अस्सी	...	इक्यासी,	बयासी	...	नब्बे ...
नब्बे	...	इक्यानबे,	बानबे	...	सौ ...

इस प्रकार से दस में और नौ बार दस जोड़ने से दस गुने दस हो जायेंगे उस की सौ संज्ञा रक्खी फिर इसी क्रम से सौ में और नौ बार सौ जोड़ने से दस गुने सौ होंगे उस की सहस्र वा हज़ार संज्ञा रक्खी फिर इसी भांति आगे सहस्र को दस २ गुने करने से जो संख्या होंगी उनकी क्रम से अयुत, लक्ष, प्रयुत, इत्यादि संज्ञा ठहराई हैं और इन संज्ञा किई हुई संख्याओं के बीच में जो संख्या हैं उनका व्यवहार उन में जो संज्ञा किये हुए खण्ड हों उन के अलग २ उच्चारण से करते हैं ।

* जो संख्याओं की संज्ञा पहिले ठहराई गई सो सब संस्कृत भाषा में हैं और यहां जो दो, तीन, चार इत्यादि संज्ञा लिखी हैं सो सब संस्कृत संज्ञाओं के अपभ्रंश हैं ।

इस प्रकार से समग्र संख्याओं का व्यवहार एक सुगम अनुगम से किया है* ।

---

* जो ग्राम्य अर्थात् गवांर लोग लिखना, पढ़ना और गिनती का नाम भी कुछ नहीं जानते वे लोग सजातीय पदार्थों को गिनने के लिये जितनी उन पदार्थों की संख्या होगी उतने कंकर अलग २ रखते हैं। अथवा एक रस्सी में उतनी गांठ देते हैं वा एक भींत पर उतने विन्दु वा रेखा करते हैं । परंतु जो समय पर कंकर, रस्सी इत्यादि गिनती की सामग्री पास न हो और गिनती को बहुत काल तक स्मरण रखना आवश्यक न हो तो उन पदार्थों को हाथ की अङ्गुलिओं से गिनते हैं सो इस प्रकार से कि हर एक हाथ में पांच २ अङ्गुलि होती हैं तब गिनने के एक २ पदार्थ के लिये पहिले दहिनी हाथ की एक २ अङ्गुलि को बन्द करते हैं। यों पांच तक गिन के उन्हीं को क्रम से एक २ को खोलते हैं । यों जब दस संख्या पूरी हो तब दस के लिये बांए हाथ की एक अङ्गुलि को बन्द करते हैं फिर दहिनी हाथ की अङ्गुलिओं से पूर्ववत् और दस गिनते हैं और तब फिर बांए हाथ की दूसरी अङ्गुलि को बन्द करते हैं। यों दो हाथ की दस अङ्गुलिओं से सौ तक गिनती लगाते हैं। फिर सौ के लिये एक कंकर वा दाना रख के इसी प्रकार से आगे भी गिनते हैं ।

गणित-विद्या का प्रचार होने के पूर्व प्रायः सब लोग इसी ऊपर के प्रकार से गणित का निर्वाह कुछ कर लेते होंगे इस में संशय नहीं । फिर उन पूर्व लोगों में जो चतुर बुद्धिमान् लोग हुए उन्हों ने इस अङ्गुलिओं से गिनती लगाने में हर एक संख्या का तुरन्त बोध होने के लिये संख्याओं के नाम ठहराए सो इस प्रकार से

पहिले दहिनी हाथ की अङ्गुलिओं से दस तक गिनती होती है इसलिये पहिले दस संख्याओं के क्रम से एक, द्वि, त्रि इत्यादि अलग २ नाम रक्खे । फिर एक और दश मिल के एकादश अर्थात् ग्यारह, द्वि और दश मिलके द्वादश अर्थात् बारह इत्यादि यौगिक संज्ञा ठहराई फिर आगे जब दूसरा दशक पूरा हुआ तब दो दशकों को मिलाने से जो संख्या हुई उस का नाम विंशति अर्थात् बीस रखा । इसी प्रकार से तीन, चार इत्यादि दशकों के त्रिंशत् चत्वारिंशत्, अर्थात् तीस, चालीस इत्यादि सौ तक अलग २ संज्ञा रखी और सौ से उत्तरोत्तर दशगुण संख्याओं के सहस्र, अयुत इत्यादि नाम रक्खे । इस लिये प्रारम्भ से दस हि संख्याओं के अलग २ नाम रखे गये फिर दस में दस हि दस बढा के उन दशोत्तर संख्याओं की अलग २ संख्या रखी हैं इत्यादि दशोत्तर और दशगुण संख्याओं की संज्ञा करने में केवल ऊपर जो अङ्गुलिओं से गिनती का प्रकार दिखलाया वही कारण है । यों पहिले संख्याओं की संज्ञा ठहराई गई फिर उस काल के अनन्तर संख्याओं के लिखने का क्रम ठहराया गया ।

इस प्रकार से संख्याओं की संज्ञा और लिखने का अतिशय रमणीय और सुगम प्रकार इसी भारत वर्ष के लोगों ने निर्माण किया । इस बात को सब लोग मानते हैं।

इस से यह स्पष्ट प्रकाशित होता है कि पृथ्वी पर जब और देशों में विद्या का लेश भी नहीं था उस के पहिले से भी इस देश के लोग विद्वान् थे इस में किसी प्रकार का कुछ सन्देह नहीं है ।

इसी प्रकार से सब संख्याओं को अङ्कों से द्योतित करने के लिये पहिली नौ संख्याओं के नौ अङ्क कल्पना किये और संख्या के अभाव का एक अङ्क कल्पना किया जिस को शून्य कहते हैं फिर एक बेंड़ी पंक्ति में दहनी ओर से लेके बांई ओर जो पहिला, दूसरा, तीसरा, इत्यादि अङ्कों के स्थान हैं उन की एक, दश, शत इत्यादि वे हीं संज्ञा किई हैं जो कि एक, दस, सौ इत्यादि उत्तरोत्तर दशगुण संख्याओं की संज्ञा हैं ।

इस पूर्वाचार्यों की कल्पना से दस अङ्क उस २ स्थान के संबन्ध से वा स्थान उस २ अङ्क के संबन्ध से हर एक संख्या को बड़े लाघव से द्योतित करते हैं । और इस से समग्र गणित का निर्वाह भी बहुत सुगमता से होता है सो प्रकार अब हम बालकों के बोध के लिये बहुत विस्तार से दिखलाते हैं ।

६ । प्रारम्भ से नौ संख्याओं की संज्ञा और उन के क्रम से द्योतक चिह्न जिनको अङ्क कहते हैं सो ये हैं ।

एक	दो	तीन	चार	पांच	छ	सात	आठ	नौ
१	२	३	४	५	६	७	८	९

और ० यह एक चिन्ह वा अङ्क कल्पना किया है यह संख्या के अभाव को दिखलाता है इस को शून्य कहते हैं ।

इन्हीं अङ्कों से समग्र संख्याओं को दिखलाने के लिये ऐसी एक उत्तम कल्पना किई है कि जब कोइ एक अङ्क है तो वह जिस संख्या का द्योतक हो उस से उसी संख्या का बोध हो और जब उस अङ्क की बांई ओर और कोइ अङ्क हो तो वह अङ्क अपनी द्योत्य संख्या को न दिखलावे परंतु उस संख्या से दशगुण संख्या को दिखलावे ।

जैसा । ४ यह अङ्क केवल चार का द्योतक है और जो इस की बांई ओर और ५ यह अङ्क लिखा जावे अर्थात् ५४ तब यह दूसरे स्थान का ५ अङ्क पांच का द्योतक नहीं है किंतु वह पचास का द्योतक है इस प्रकार से ५४ ये दो अङ्क मिल के पचास और चार चौवन को द्योतित करते हैं । इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि जो कोइ संख्या नौ से अधिक और सौ के भीतर हो उस को द्योतित करने के लिये चाहिये कि उस संख्या में जितने दशक हों सो अलगाये जावें तब दशक का अङ्क पहिले लिख के जो दशक छोड़ शेष संख्या बची हो उस का अङ्क उस दशक के अङ्क की दहिनी ओर लिखा जावे इस प्रकार से उन दो अङ्कों से वह संख्या द्योतित होगी । जैसा जो चौंसठ संख्या

को अङ्क द्वारा द्योतित करना हो तो चौंसठ में छ दशक हैं और चार एक हैं इस लिये चौंसठ संख्या ६४ इस से द्योतित होगी ।

७ । यहां यह जानना चाहिये कि जब द्योत्य संख्या में दशक निःशेष हों और शेष कुछ न रहे तो पहिले दशक का अङ्क लिख के उस के दहनी ओर ० यह शून्य लिखते हैं ।

संख्या के जिस स्थान में यह शून्य रहता है वहां दिखलाता हैं कि उस स्थान की संख्या का मान कुछ नहीं है ।

जैसा दस, बीस, तीस इत्यादि संख्याओं में क्रम से एक, दो, तीन, इत्यादि दशक हैं और एक स्थान की संख्या कुछ नहीं है । इस लिये इन के द्योतक अङ्क क्रम से १०, २०, ३० इत्यादि होंगे ।

८ । अब बालकों के बोध के लिये एक से लेके सौ तक संख्याओं की संज्ञा और ऊपर के दो प्रक्रमों के अनुसार हर एक संख्या के द्योतक अङ्क उस २ संख्या की संज्ञा के आगे लिख के दिखलाते हैं ।

संज्ञा	अङ्क	संज्ञा	अङ्क	संज्ञा	अङ्क	संज्ञा	अङ्क	संज्ञा	अङ्क
एक	१	इक्कीस	२१	इकतालीस	४१	इकसठ	६१	इक्यासी	८१
दो	२	बाईस	२२	बयालीस	४२	बासठ	६२	बयासी	८२
तीन	३	तेईस	२३	तिरतालीस	४३	तिरसठ	६३	तिरासी	८३
चार	४	चौबीस	२४	चवालीस	४४	चौंसठ	६४	चौरासी	८४
पांच	५	पचीस	२५	पैंतालीस	४५	पैंसठ	६५	पचासी	८५
छ	६	छब्बीस	२६	छियालीस	४६	छांसठ	६६	छियासी	८६
सात	७	सत्ताईस	२७	सैंतालीस	४७	सतसठ	६७	सत्तासी	८७
आठ	८	अट्ठाईस	२८	अड़तालीस	४८	अड़सठ	६८	अट्ठासी	८८
नौ	९	उनतीस	२९	उनचास	४९	उनहत्तर	६९	नवासी	८९
दस	१०	तीस	३०	पचास	५०	सत्तर	७०	नब्बे	९०
ग्यारह	११	इकतीस	३१	इक्यावन	५१	इकहत्तर	७१	इक्यानबे	९१
बारह	१२	बत्तीस	३२	बावन	५२	बहत्तर	७२	बानबे	९२
तेरह	१३	तैंतीस	३३	तिरपन	५३	तिहत्तर	७३	तिरानबे	९३
चौदह	१४	चौंतीस	३४	चौवन	५४	चौहत्तर	७४	चौरानबे	९४
पंद्रह	१५	पैंतीस	३५	पचपन	५५	पचहत्तर	७५	पंचानबे	९५
सोलह	१६	छत्तीस	३६	छप्पन	५६	छिहत्तर	७६	छानबे	९६
सत्रह	१७	सैंतीस	३७	सत्तावन	५७	सतहत्तर	७७	सत्तानबे	९७
अठारह	१८	अड़तीस	३८	अट्ठावन	५८	अठहत्तर	७८	अट्ठानबे	९८
उन्नीस	१९	उनतालीस	३९	उनसठ	५९	उनासी	७९	निन्नानबे	९९
बीस	२०	चालीस	४०	साठ	६०	अस्सी	८०	सौ	१००

९। अब सौ के आगे सब संख्याओं की संज्ञा और उन के द्योतक अङ्क एक अनुगम से जानने के लिये एक से लेके उत्तरोत्तर दशगुण संख्याओं की संज्ञा लिखते हैं।

एक
दश अर्थात् दस
शत अर्थात् सौ
सहस्र अर्थात् हज़ार
दश सहस्र वा अयुत अर्थात् दस हज़ार
लक्ष अर्थात् लाख
दश लक्ष वा प्रयुत अर्थात् दस लाख
कोटि अर्थात् करोड़
दश कोटि वा अर्बुद अर्थात् दस करोड़
अब्ज
दश अब्ज वा खर्व
निखर्व
दश निखर्व वा महापद्म
शङ्कु
दश शङ्कु वा जलधि
अन्त्य
दश अन्त्य वा मध्य
परार्ध

ये जो एक, दश, शत इत्यादि एक से लेके उत्तरोत्तर दस गुनी संख्याओं की संज्ञा लिखी हैं सो ही सब एक पंक्ति में लिखे हुए अङ्कों में दहनी ओर के अङ्क से लेके क्रम से बांई ओर के सब अङ्कों के स्थानों की भी संज्ञा किई हैं। इस का प्रयोजन यही है कि जो अङ्क एक स्थान में रहे सो अपना जो मान है उसी को दिखलावे परंतु जो और स्थान में रहे सो अपने वास्तव मान को न दिखलावे किन्तु उस स्थान की जो संख्या हो उस संख्या से गुने हुए उस मान को दिखलावे।

जैसा। ५३७ इस में दहनी ओर के अन्त में अर्थात् एक स्थान में ७ यह अङ्क है यह केवल सात को दिखलाता है उस की बांई ओर दूसरे स्थान में अर्थात् दशस्थान में ३ यह अङ्क है यह यहां तीन का द्योतक नहीं है किन्तु दस से गुने हुए तीन का

अर्थात् तीस का द्योतक है और इस की भी बांई ओर तीसरे स्थान में अर्थात् शत-स्थान में ५ है यह अङ्क यहां पांच को नहीं दिखलाता किन्तु सौ से गुने हुए पांच को अर्थात् पांच सौ को दिखलाता है। इस प्रकार से ५३७ में एक पंक्ति में लिखे हुए तीन अङ्क मिल के पांच सौ सैंतीस को दिखलाते हैं।

और भी ६०९२ इस में २ यह केवल दो को दिखलाता है, ९ यह नब्बे को, ० यह दिखलाता है कि इस में शतक नहीं है और ६ यह चौथे स्थान का अङ्क छ हजार को दिखलाता है। इस भांति ६०९२ ये चार अङ्क छ हजार बानवे को दिखलाते हैं।

१०। ऊपर के प्रक्रम से सौ के आगे भी हरएक संख्या को अङ्कों से दिखला सकते हैं। और अङ्कों से दिखलाई हुई संख्या को पढ़ सकते हैं। इन दोनों क्रियाओं को क्रम से संख्योल्लेखन और संख्योल्लापन कहते हैं।

संख्योल्लेखन।

११। संख्योल्लेखन अर्थात् किसी संख्या को अङ्कों में लिख के द्योतित करना। यह (९) वे प्रक्रम में दिखलाए हुए प्रकार से अच्छी भांति हो सकता है सो ही अब नीचे लिखे हुए उदाहरणों से अति स्पष्ट होगा।

उदा० (१)। सैंतालीस हजार पांच सौ उनतीस इस संख्या को अङ्कों से द्योतित करो।

यहां थोड़ा विचारने से तुरन्त मन में आवेगा कि उनतीस में एक स्थान का अङ्क ९ और दशस्थान का अङ्क २ है यों दो स्थानों के अङ्क २९ ये दो हैं फिर पांच सौ में शतस्थान का अङ्क ५ है इस को उन दो अङ्कों की बांई ओर लिख देने से ५२९ ये तीन अङ्क हुए। फिर सैंतालीस हजार में हजार के स्थान का अर्थात् चौथे स्थान का अङ्क ७ है और दश हजार वा पांचवे स्थान का अङ्क ४ है यों चौथे और पांचवे स्थानों के अङ्क ४७ ये हैं इन को ५२९ इन तीन अङ्कों की बांई ओर लिखदेने से ४७५२९ ये पांच अङ्क सिद्ध हुए। इस प्रकार से उद्दिष्ट संख्या के द्योतक अङ्क ४७५२९ ये हैं।

उदा० २। तीन करोड़ पचास हजार सात सौ चार इस संख्या को अङ्कों से दिखलाओ।

यहां एक स्थान का		अङ्क	४	है।
दश	...	...	०	"
शत	...	...	७	"
सहस्र वा हजार	...	...	०	"
दश सहस्र	...	...	५	"
लक्ष	...	...	०	"
दश लक्ष	...	...	०	"
कोटि वा करोड़	...	...	३	"

इस लिये उद्दिष्ट संख्या के द्योतक अङ्क ३००५०७०४ ये हैं।

१२। इस ऊपर के उदाहरण की क्रिया को देखने से स्पष्ट प्रकाशित होता है जो लाघव से संख्योल्लेखन के लिये क्रम से एक, दश, शत, इत्यादि संख्याओं की संज्ञा को कण्ठ करो तो अक्षरों से लिखी हुई संख्या के नीचे तुरन्त उस के अङ्कों को इस प्रकार से लिख सकोगे कि एक स्थान से ले के जिस स्थान की जो संख्या हो उस स्थान में उस का अङ्क लिखो और जिस की संख्या न हो उस स्थान में शून्य लिखो ।

जैसा । तीन करोड़ पचास हजार सात सौ चार, इस के नीचे बाईं ओर से
३ ० ० ५ ० ७ ० ४ तुरंत इन अङ्कों को लिखो ।

१३। जो एक, दश, शत, इत्यादि संज्ञाओं को उलटे क्रम से कण्ठ करो जैसा परार्ध, मध्य, अन्त्य इत्यादि तो १२वे प्रक्रम के विधि से संख्या के अङ्कों को अधिक लाघव से लिख सकोगे ।

उदा० । पैंतीस करोड़ पांच लाख नौ हजार सत्रह इस संख्या को अङ्कों से द्योतित करो ।

यहां थोड़ा ध्यान करके उद्दिष्ट संख्या के नीचे दहनी ओर से जिस स्थान की जो संख्या हो उस में उस का अङ्क लिखो और जिस की न हो वहां शून्य लिखो । जैसा ।

उद्दिष्ट संख्या । पैंतीस करोड़, पांच लाख, नौ हजार, सत्रह
इस के अङ्क ३५ ० ५ ० ९० १७

इस प्रकार से उद्दिष्ट संख्या के द्योतक ३५०५०९०१७ ये अङ्क अधिक लाघव से सिद्ध हुए ।

संख्योल्लेखन के अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

नीचे लिखी हुई संख्याओं को अङ्कों से द्योतित करो ।

(१) एक सौ तीन, एक सौ सात, एक सौ बीस, एक सौ पैंतालीस, एक सौ साठ, एक सौ सत्तानवे ।

(२) दो सौ पांच, दो सौ पन्द्रह, दो सौ छप्पन, तीन सौ सात, तीन सौ अस्सी, तीन सौ छियासी ।

(३) चार सौ नौ, चार सौ उनतालीस, चार सौ अड़सठ, पांच सौ पांच, पांच सौ सत्ताईस, पांच सौ उनहत्तर, छ सौ बत्तीस, छ सौ उनंचास, छ सौ सत्तासी ।

(४) सात सौ दो, सात सौ बीस, सात सौ सतहत्तर, आठ सौ अट्ठाईस, आठ सौ चौंतीस, आठ सौ उनासी, नौ सौ तीस, नौ सौ चौवन, नौ सौ नवासी ।

(५) एक हजार तीन, एक हजार तीस, दो हजार तीन सौ पांच, दो हजार सात सौ बाईस, तीन हजार पांच सौ, सात हजार एक सौ छत्तीस, सात हजार चौहत्तर ।

(६) आठ हजार नौ सौ पचीस, आठ हजार उनसठ, नौ हजार छ सौ बहत्तर, नौ हजार पांच सौ सात, नौ हजार दो सौ पचपन ।

(७) दस हजार एक सौ छब्बीस, सत्रह हजार आठ सौ बत्तीस, चौबीस हजार बारह, उनतीस हजार छ सौ तीन, तीस हजार दो सौ नौ ।

(८) तेंतीस हजार नौ सौ सोलह, चालीस हजार दो सौ पांच, पचपन हजार, बासठ हजार सात सौ, पैंसठ हजार तीन सौ एक ।

(९) सत्तर हजार चार सौ उनतालीस, अस्सी हजार आठ सौ चौबीस, बयासी हजार पांच सौ तीन, अठ्ठासी हजार नौ सौ चार, नब्बे हजार पांच, पंचानवे हजार तीन सौ सात ।

(१०) एक लाख तीन हजार सात सौ छब्बीस, सात लाख पचीस हजार, पन्द्रह लाख तेईस हजार बावन, सैंतीस लाख अट्ठावन हजार पांच सौ छप्पन ।

(११) छियासी लाख तीन हजार पांच, दो करोड़ पचास लाख सत्तासी हजार आठ सौ तिरपन, सात करोड़ अठ्ठावन हजार चार सौ छिहत्तर, अठारह करोड़ उनसठ लाख पांच हजार तीन सौ बयालीस ।

(१२) चौत्रीस करोड़ तीन लाख छ सौ अठहत्तर, तेंतीस करोड़ उनंचास लाख तीन हजार दो, पैंतालीस करोड़ सत्तावन लाख एक हजार आठ सौ तीन, बावन करोड़ पांच लाख तीन हजार नौ सौ ।

(१३) चौंसठ करोड़ सात सौ पैंतीस, सतहत्तर करोड़ दो लाख-चालीस, नवासी करोड़ सत्रह लाख तीन सौ, तिरानवे करोड़ अडतीस हजार उनहत्तर, नब्बे करोड़ पांच सौ दो ।

(१४) पांच अब्ज तीन करोड़ सात लाख एक सौ पांच, पचीस अब्ज सैंतीस करोड़ तेईस लाख तीन सौ सत्रह, उनतालीस अब्ज चौवन करोड़ दो लाख सात हजार चार सौ एक, छिहत्तर अब्ज चार करोड़ छ हजार दो सौ तीन ।

(१५) तीन निखर्व दो अब्ज सात करोड़ चौवन लाख नौ हजार एक सौ छ, सत्रह शङ्कु अठ्ठाईस निखर्व उनतीस अब्ज चौंतीस करोड़ चार लाख अड़सठ हजार तीन सौ बहत्तर, आठ परार्ध छत्तीस अन्त्य सत्तर निखर्व अठारह करोड़ छियालीस लाख दो हजार एक सौ तीन ।

संख्योल्लापन ।

१४ । संख्योल्लापन अर्थात् अङ्कों से दिखलाई हुई किसी संख्या को पढ लेना । यह (१२) वे और (१३) वे प्रक्रम में लिखे हुए विधिओं की विपरीत क्रिया से तुरंत हो सकता है । यह नीचे लिखे हुए उदाहरणों को देखने से अधिक स्पष्ट होगा ।

उदा०(१) ५८४७३ इस की संख्या पढो ।

यहां एक स्थान में तीन हैं।

दश	..	सात
शत	..	चार
हजार	..	आठ
दस हजार	..	पांच

इस लिये ५८४७३ यह संख्या अठावन हजार चार सौ तिहत्तर है।

उदा०(२) ७३०५४२८१ इस की संख्या कहो।

यहां एक स्थान में एक है।

दश	..	आठ
शत	.	दो
हजार	..	चार
दस हजार	..	पांच
लाख	..	शून्य
दस लाख	..	तीन
करोड़	..	सात

इस लिये ७३०५४२८१ यह संख्या सात करोड़ तीस लाख चौवन हजार दो सौ इक्यासी है।

१५। ऊपर के उदाहरणों में जो विस्तार से क्रिया दिखलाई सो केवल बालकों के बोध के लिये है। परंतु जिस को एक, दश, शत, इत्यादिक संज्ञा सब अनुलोम और विलोम क्रम से कण्ठ हैं सो उद्दिष्ट अङ्कों के एक स्थान से लेके सब अङ्कों के स्थानों की संज्ञा क्रम से पढे। और ध्यान में रक्खे कि किस २ स्थान में कौन २ अङ्क है तब विपरीत क्रम से अर्थात् उद्दिष्ट अङ्कों की बांई ओर के स्थान से लेके उस संख्या को पढे।

उदा०। ९७०५४८२३१ इस की संख्या कहो।

यहां एक स्थान से लेके सब अङ्क दश कोटि अर्थात् दश करोड़ के स्थान तक हैं इसलिये विपरीत क्रम से पढने से यह संख्या सत्तानबे करोड़ पांच लाख अड़तालीस हजार दो सौ इकतीस है।

संख्योल्लापन के अभ्यास के लिये और उदाहरण।

नीचे अङ्कों में दिखलाई हुई संख्याओं को पढो।

(१) १०२, १०८, १३०, १५७, १६३, १८९।

(२) २१३, २२७, २६५, ३०४, ३८६, ३९४।

(३) ४०१, ४३२, ४७३, ५०६, ५३४, ५७०, ६२८, ६५३, ६८९।

(४) ७०३, ७१६, ७८३, ८१७, ८४३, ८६५, ९२४, ९५७, ९८६।

(५) १०१३, १०२०, २४१७, २६३४, ३००८, ४१०६, ५४३१, ६६२७, ७०५०।

(६) ८०६३, ८७१६, ९५८३, ९६६०, ९७२३, ९८०५।

(७) १०३५८, ३३०४३, २९२०१, ३१८२६, ३५०४६, ३७२३० ।

(८) ४१५०८, ४४१५७, ४९०३८, ५७३१४, ७०१०६, ८०००२ ।

(९) ८२०६०, ८५८३३, ८७००९, ८९९०९, ९००१५, १३००७, ९००३०६ ।

(१०) १२७५४३१, २३००२४७, ३४१००३०, ४४३५०४२, ५४८२५०६ ।

(११) ६५०३७५२, ७५३६००८, ८६००८००, ८७०५३०६, ९००६१७२, १००२००३० ।

(१२) ९०८०७०६०, १३५०२७१४५, १५७८०२०६८, २०३००४०००, २७९००४१२३, ३६९२५८१४७, ४६८५५९०३२, ५३०७१६२४९ ।

(१३) ६०१०२६४९८, ६३०७४१८५२, ६७८२१०३५७, ७००६०८२०५, ७३२५०४२८१ ८५००६००१३, ९००६००३००, ९२०६५०४३२ ।

(१४) ९८७६५४३२१०, १३०७८०३२६८५, २५३७६५७००४२, ४६०१०६२७०३९, ६७२०४०००२९६, ८५१७०४६३२०७, ९०१९९०२०३४८, ९७०८६०५३०४२ ।

(१५) ५०२४१३७९४६०३, ७३००६२१०४२५०१, २०६०३७९२१७३०९६, ६५३४४९६७३१४१६७०२८ ।

१६ । ऊपर जो संख्योल्लेखन और संख्योल्लापन के प्रकार दिखलाए हैं इन से बड़ी संख्या के लिखने और बांचने में बालकों को अवश्य बहुत क्लेश होगा इसलिये संख्या के दूसरे, तीसरे आदि स्थानों की जो दश, शत इत्यादि उत्तरोत्तर दशगुण संज्ञा किई हैं सो एक शून्य का स्थान, दो शून्य का स्थान, तीन शून्य का स्थान इत्यादि कहावें और इसीलिये जिस संख्या के अङ्क पर एक शून्य हो सो एक शून्य की संख्या कहावे, जिस के अङ्क पर दो शून्य हों सो दो शून्य की संख्या कहावे इसी प्रकार से आगे भी जानो । जैसा सात सौ ७०० ये दो शून्य के सात कहावें । दो लाख २००००० ये पांच शून्य के दो कहावें, यों कहने का अभ्यास होने से हर एक संख्या के बांचने और लिखने में बड़ा लाघव होगा ।

१७ । अब संख्याओं के परिकर्मषड्विध का अर्थात् उन के संकलन, व्यवकलन, गुणन, भागहार, घातक्रिया और मूलक्रिया इन छ परिकर्मों का क्रम से वर्णन करेंगे और हरएक परिकर्म के वर्णन के प्रारम्भ में उस २ परिकर्म का लक्षण लिखेंगे । परंतु जैसा हर एक संख्या की लाघव से शीघ्र उपस्थिति होने के लिये अङ्क कल्पना किये हैं इसी प्रकार से इन परिकर्मों को लाघव से द्योतित करने के लिये और गणित की बोली को भी कुछ संक्षेप से दिखलाने के लिये कितने एक चिह्न कल्पना किये हैं सो हम यहां क्रम से लिख के दिखलाते हैं ।

(१) + यह चिह्न संकलन का द्योतक है इस को धन चिह्न कहते हैं।

जैसा । ७ + ५ यह दिखलाता है कि ७ और ५ का योग करो । इस को ७ धन ५ यों बोलते हैं और इस का मान १२ है ।

(२) = यह चिह्न समता वा एकरूपता का द्योतक है । जो दो वा अनेक मान परस्पर समान वा एकरूप हैं उन में दो २ के बीच में इस चिह्न को लिखते हैं ।

जैसा । ७ + ५ = १२ इस को समीकरण कहते हैं इस का अर्थ यह है कि ७ और ५ का योग १२ है ।

इसी प्रकार से २ + ३ + ५ = ४ + ६ = १० इत्यादि जानो ।

(३) – यह चिह्न व्यवकलन का द्योतक है इस को ऋण चिह्न कहते हैं ।

जैसा । ७ – ५ यह दिखलाता है कि ७ में ५ घटा देओ । यहां ७ ऋण ५ यों बोलते हैं इस का मान २ है अर्थात् ७ – ५ = २ ।

(४) × यह चिह्न गुणन का द्योतक है ।

जैसा । ७ × ५ यह दिखलाता है कि ७ को ५ से गुण देओ । यहां ७ गुणा ५ यों बोलते हैं इस का मान ३५ है अर्थात् ७ × ५ = ३५

इसी भांति ३ × ४ × ६ = ७२ ।

(५) ÷ यह चिह्न भागहार का द्योतक है ।

जैसा । ६ ÷ ३ यह दिखलाता है कि ६ में ३ का भाग देओ । यहां ६ भागा ३ यों बोलते हैं इस का मान २ है अर्थात् ६ ÷ ३ = २ ।

इस को $\frac{६}{३}$ यों भी लिखते हैं । इस लिये $\frac{६}{३}$ = २ इस रूप का भी समीकरण लिखते हैं ।

(६) घातक्रिया में घातमापक की जो संख्या हो वही घातक्रिया का चिह्न है । जिस संख्या का घात दिखलाना हो उस मूल संख्या के ऊपर दहनी ओर घातमापक की संख्या लिखते हैं ।

जैसा । $५^{२}$ यह दिखलाता है कि ५ का द्विघात अर्थात् वर्ग करो । इस का मान २५ है इस लिये $५^{२}$ = २५

इसी भांति $४^{३}$, $३^{५}$, $१३^{२}$ ये क्रम से ४ का घन, ३ का पञ्चघात और १३ का वर्ग द्योतित करते हैं ।

(७) $\sqrt{}$ यह चिह्न मूलक्रिया का द्योतक है ।

जैसा । $\sqrt{४}$ यह दिखलाता है कि ४ का वर्गमूल निकालो । इस का मान २ है अर्थात् $\sqrt{४} = २$

और $\sqrt[३]{८}$ यह ८ के घनमूल का द्योतक चिह्न है ।

इसी प्रकार से आगे भी ।

(८) ——, ( ), { } और [ ] ये चारो चिह्न प्रत्येक दिखलाते हैं कि इन के भीतर जो अनेक संख्या परस्पर संयुक्त वा वियुक्त हों वे सब मिल के मानो एक संख्या है । इन चार चिह्नों में पहिला चिह्न शृङ्खल और तीन चिह्न कोष्ठ कहलाते हैं ।

जैसा । $\overline{२+३} + \overline{७-५}$, $(२+३)+(७-५)$, $\{२+३\}+\{७-५\}$ और $[२+३]+[७-५]$ ये चारो प्रत्येक दिखलाते हैं कि २ और ३ के योग में ७ और ५ का अन्तर जोड़ देओ । अर्थात् $२+३=५$ और $७-५=२$ इस लिये $\overline{२+३}+\overline{७-५}$ वा $(२+३)+(७-५)$ इत्यादि प्रत्येक $=५+२=७$ है ।

$\overline{२+३}-\overline{७-५}$, $(२+३)-(७-५)$ इत्यादि प्रत्येक दिखलाते हैं कि २ और ३ के योग में ७ और ५ का अन्तर घटा देओ इसलिये $\overline{२+३}-\overline{७-५}$, $(२+३)-(७-५)$ इत्यादि प्रत्येक $=५-२=३$ है ।

इसी भांति $(२+३)\times(७-५)$ वा $(२+३)(७-५)$ यह दिखलाता है कि २ और ३ के योग को ७ और ५ के अन्तर से गुण देओ । इसलिये $(२+३)(७-५) = ५\times२ = १०$ ।

$(२+३)\div(७-५)$ वा $\frac{२+३}{७-५}$ यह दिखलाता है कि २ और ३ के योग में ७ और ५ के अन्तर का भाग देओ । इसलिये $(२+३)\div(७-५)$ वा $\frac{२+३}{७-५}=\frac{५}{२}$

$(७-५)^२$ यह दिखलाता है कि ७ और ५ के अन्तर का वर्ग करो । इसलिये $(७-५)^२=२^२=४$ ।

$४(२+३)^३$ यह दिखलाता है कि २ और ३ के योग के घन को ४ से गुण देओ । अर्थात् $४(२+३)^३=४\times५^३=४\times१२५=५००$

$२\sqrt{५+४}$ यह दिखलाता है कि ५ और ४ के योग के वर्गमूल को २ से गुण देओ इस लिये $२\sqrt{५+४}=२\sqrt{९}=२\times३=६$ ।

(९) ∵ और ∴ ये कारण के द्योतक चिह्न हैं इन में ∵ यह 'जिस लिये' इस का बोधक है और ∴ यह 'इस लिये' इस का बोधक है ।

(१०) इत्या० वा ⋯ ⋯ यह इत्यादि का द्योतक चिह्न है ।

१८ । इस प्रक्रम में कितने एक प्रसिद्ध अर्थ लिखते हैं । प्रसिद्ध अर्थ वे सिद्धान्त हैं जिन को सिद्ध करने के लिये कुछ उपपादन करना न चाहिये और जिन को सुनते हि सब लोग मान्य करते हैं ।

(१) जितने मान प्रत्येक किसी एक हि मान के समान हैं वे सब परस्पर समान हैं ।

(२) समान दो मानों में समान हि जोड़ देओ वा घटा देओ अथवा समान से गुण देओ वा भाग देओ तोभी फल परस्पर समान होंगे ।

(३) विषम दो मानों में जो समान जोड़ देओ वा घटा देओ तो उन का अन्तर उतना हि बना रहता है ।

(४) कोइ दो मानों में जो एक मान कुछ अधिक किया जावे और उतना हि दूसरा मान घटा दिया जावे तोभी उन अधिक और न्यून किये हुए मानों का योग उतना हि होता है जितना उन पूर्व दो मानों का योग है ।

(५) न्यून और अधिक दो मानों को जो किसी एक संख्या से गुण देओ वा भाग देओ तो भी फल क्रम से न्यून और अधिक होंगे ।

(६) जितने मान प्रत्येक किसी एक हि मान से द्विगुण वा अधिक गुण हैं अथवा किसी एक हि मान के आधे वा कोइ अंश हैं वे सब परस्पर समान हैं ।

(७) जिस मान में और कोइ मान जोड़ के घटा दिया जावे वा जो एक हि संख्या से गुण के भागा जावे तोभी वह मान ज्यों का त्यों बना रहता है ।

(८) कोइ मान अपने अंश से बड़ा होता है और अपने सब अंशों के योग के समान है ।

२ संकलन ।

१९ । दो वा बहुत संख्याओं को मिलाने से जो एक संख्या होगी उस को उन संख्याओं का योग कहते हैं और उस योग के जानने की क्रिया को संकलन कहते हैं ।

२० । जो इकट्ठे करने की संख्या केवल दो होवें तो उन में जिस संख्या में दूसरी संख्या मिलानी होगी उस पहिली संख्या को योज्य

कहते हैं और दूसरी को योजक कहते हैं। अब संकलन का सयुक्तिक वर्णन विस्तार से कहते हैं।

२१। जब योज्य और योजक दोनो एक अङ्क के हैं अर्थात् दोनो दस से छोटे हैं तब इस नीचे लिखे हुए चक्र में योज्य अङ्क के नीचे जो योजक अङ्क के सामने की पंक्ति में संख्या होगी सो ही योग जानो।

योज्य अङ्क

योजक अङ्क	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
०	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
१	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
२	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११
३	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२
४	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३
५	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४
६	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५
७	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६
८	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७
९	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८

जैसा। ८ और ५ इन का योग जानना है तब ८ इस योज्य अङ्क के नीचे ५ इस योजक अङ्क के सामने की पंक्ति में १३ हैं इसलिये ८ और ५ इन का योग १३ है।

२२। ऊपर के चक्र में जो योग बना के सिद्ध अङ्क लिख दिये हैं उस की युक्ति यह है।

यह अति स्पष्ट है कि हर एक संख्या का मान उतना ही है जितने उस में एक हैं इसलिये कोइ दो संख्याओं का योग उतनी ही संख्या होगी कि योज्य संख्या में जितने एक हैं और योजक संख्या में जितने हैं उन सब एकों को इकठ्ठे करने से जितने एक

होंगे। जैसा ८ और ५ इन का योग जानना है तब ८ में १, १, १, १, १, १, १, १, इतने एक हैं और ५ में १, १, १, १, १, इतने हैं इसलिये ८ और ५ को १ मिल के १, १, १, १, १, १, १, १, १, १, १, १, १, इतने एक होते हैं इन सभों को गिनने से जान पड़ता है कि ये १३ एक हैं इस लिये ८ और ५ इन का योग १३ है। इसी प्रकार से हर एक दो २ अङ्कों का योग करके अभ्यास के लिये चक्र में लिखा है।

२३। अनुमान। ऊपर की युक्ति से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि ८ और ५ इन का योग करना हो तो चाहो ८ में ५ जोड़ो वा ५ में ८ जोड़ो तौभी योग तुल्य हि होगा।

२४। ऊपर के चक्र में जो योग लिखे हैं वे सब अभ्यास करके अवश्य कण्ठ करने चाहिये नहीं तो ऊपर की युक्ति से गिनती करने में बड़ा हि गौरव होगा।

२५। ऊपर लिखे हुए चक्र का जब ऐसा अभ्यास हो जायगा कि कोई योज्य और योजक जो दोनो दस से छोटे हैं उन को सुनते ही उन का योग तुरंत मन में आवे तब जो योज्य और योजक में एक दस से छोटा हो और दूसरा दस वा दस से बड़ा हो तौभी उन का योग उसी चक्र के अभ्यास की सहायता से तुरंत मन में आ सकता है।

जैसा।	योज्य	योजक	योग
	५	१०	१५
	१५	७	२२
	३	३७	४०
	६	६३	७२
	इत्या०	..	..

२६। (२१) वे प्रक्रम के चक्र का और (२५) वे प्रक्रम का जब अच्छी भांति अभ्यास हो जावे तब जो योग करने की बहुत सी संख्या ऐसी हों कि जिन में हर एक संख्या एक अङ्क की अर्थात् दस से छोटी हैं तब उन सब संख्याओं का योग (२१) वे और (२५) वे प्रक्रम के अभ्यास की सहायता से तुरंत हो सकता है। सो इस प्रकार से कि जिन एक अङ्क की संख्याओं का योग करना है वे सब एक के नीचे एक हों ऐसी लिखो तब (२१) वे प्रक्रम के अभ्यास से ऊपर की दो संख्याओं का योग जानो तब (२५) वे प्रक्रम से वह योग और तीसरी संख्या इन का योग जानो। आगे इसी प्रकार से उस योग को चौथी में जोड़ो तब जो योग होगा उस को पांचवी संख्या में जोड़ो इसी भांति मन में

करते २ अन्त में जो योग होगा सो ही उन सब संख्याओं का योग है इस को सब संख्याओं के नीचे एक रेखा खींच के उस के नीचे लिखो ।

उदा० । १, ३, ४, ६, ७ और ९ इन संख्याओं का योग क्या है ।

तब	१	यहां ऊपर की दो संख्या १ और ३ इन का योग ४
	३	फिर इस का और तीसरी संख्या ४ का योग ८ इस का
	४	और चौथी संख्या ६ का योग १४ इस का और पांचवी
	६	७ का योग २१ फिर इस योग का और छठवी संख्या
	७	९ का योग ३०। इस प्रकार से १, ३, ४, ७ और ९ इन
	९	सब संख्याओं का योग ३० है ।
योग	३०	

इस योग करने के समय में इस प्रकार से बोलते हैं। एक और तीन, चार और चार, आठ और छ, चौदह और सात, इक्कीस और नौ, तीस ३० ।

२७ । अब कोई संख्या एक वा अनेक अङ्कों की दो वा बहुत हों उन के संकलन की रीति लिखते हैं ।

रीति । जिन संख्याओं का संकलन करना है उन को एक के नीचे एक ऐसे क्रम से लिखो कि सब संख्याओं के एक स्थान के अङ्क एक के नीचे एक आवें और इसी क्रम से दश, शत इत्यादि स्थानों के अङ्क अपने २ नीचे आवें । तब नीचे की संख्या के नीचे एक बेंडी रेखा खींचो । फिर (२६) वे प्रक्रम से सब एक स्थान के अङ्कों का योग करके उस योग में जो एक स्थान का अङ्क हो उस को उस बेंडी रेखा के नीचे एकस्थान में लिखो और जो दशक की संख्या बची हो उस का और दशस्थान के सब अङ्कों का योग करो। इन सब दशकों के योग में भी जो एक-स्थान में दशक का अङ्क हो उस को रेखा के नीचे दशस्थान में लिख के जो शेष संख्या बची हो उस का और शतस्थान के अङ्कों का योग करो और इसी प्रकार से अन्त तक करो और जो अन्त में योग होगा सो सब का सब रेखा के नीचे अन्त स्थान में लिख देओ । यों करने से रेखा के नीचे जो संख्या बनेगी सो उन संख्याओं का योग है ।

२८ । इस रीति की उपपत्ति यह है ।

जब कि यह अति स्पष्ट है कि सजातीय अर्थात् एक जाति की संख्याओं का ही योग हो सकता है और भिन्न जाति की संख्याओं का नहीं जैसा कि तीन एक और पांच एक इन का योग आठ एक हैं परंतु तीन एक और पांच दशक इन का योग न आठ एक हैं न आठ दशक हैं इस लिये रीति में संख्याओं को ऐसे क्रम से लिखने को लिखा है कि सजातीय अङ्कों के नीचे सजातीय अङ्क आवें तब सब सजातीयों का जो अलग २ योग किया है सो सब ठीक है ।

उदा० । ८२४७, १७५३८, ५०४२१, १२८९ और ३०४९२ इन का योग क्या है ?

तब ८२४७
१७५३८
५०४२१
१२८९
३०४९२
योग १०७९८७

यहां पहिले एक स्थान के ७, ८, १, ९ और २ इन सब अङ्कों का योग २७ करो । इस में एक स्थान का अङ्क ७ है उस को रेखा के नीचे एक स्थान में लिखो और जो दशक का अङ्क २ बचा है उस का और दश स्थान के ४, ३, २, ८ और ९ इन सब अङ्कों का योग २८ करो । इस में एक स्थान का अङ्क ८ है उसको रेखा के नीचे दश स्थान में लिखो और इस के दश स्थान में जो अङ्क २ बचा है उस का और शत स्थान के २, ५, ४, २ और ४ इन सभों का योग १९ करो । इसी प्रकार से आगे भी करो तब अन्त में जो योग १० होता है उस को रेखा के नीचे अन्त में लिख देओ । यों करने से यहां १०७९८७ यह योग हुआ ।

यहां संकलन करने के समय में इस प्रकार से बोलते हैं ।

सात और आठ, पन्द्रह और एक, सोलह और नौ, पचीस और दो; सत्ताईस के सात (यों कह के रेखा के नीचे एक स्थान में ७ लिख के फिर कहते हैं कि) हाथ लगे दो । दो और चार, छ और तीन, नौ और दो, ग्यारह और आठ, उन्नीस और नौ, अट्ठाईस के आठ (तब रेखा के नीचे दश स्थान में ८ लिख के फिर कहते हैं कि) हाथ लगे दो । दो और दो चार और पांच, नौ इत्यादि अन्त तक बोल के अन्त में जो दस योग आता है वहां दस के दस यों कह के सब दस अन्त में लिख देते हैं ।

२९ । योग की प्रतीति करने का प्रकार । संकलन करने में जिस प्रकार से हर एक ऊर्ध्वाधर अर्थात् खड़ी पंक्ति के अङ्कों का योग ऊपर से नीचे तक करते हैं वैसा ही नीचे से ऊपर तक सब अङ्कों को जोड़ के योग करो । जो पहिले योग के समान हि यह योग होगा तब प्रायः पहिला योग शुद्ध अर्थात् ठीक होगा ।

इस की उपपत्ति (२३) वे प्रक्रम से अति स्पष्ट है ।

संकलन के उदाहरण ।

(१)	(२)	(३)	(४)	(५)
२	६	१६	७५	१६
३	७	७	८	१२
४	८	५	९	१७
५	९	४	२५	२३
१४	३०	३२	११७	६८

(६)	(७)	(८)	(९)	(१०)
७५	३७	७५८	१७९	२५९७
९८	१३८	७५	२२५	४३२
४३	७९	९८७	३४५	५७२९
५६	६३	८९	१५१	३५६३
२७२	३१७	१९०९	९००	१२३२१

(११)
```
  ८२५९१
  ९१७५
  ९४५६७
  ७५२९५८
 ─────────
  ९३९२९१
```

(१२)
```
  ९८४७८४
  ४२८७१
  १३९५२१७
  ५६४७८२
 ─────────
  २९८७६५४
```

(१३)
```
  ८३९५२८६
  ६१५२३७
  ८७५९२
  ९७४१३४९
  ५६३२९८३
 ─────────
  २४४७२४४७
```

(१४)
```
  ७२३४४१४
  ४६२०५९
  ४५७७४७५
  २१७६९२४३
  ४२३८६१७
 ─────────
  ३८२८१८०८
```

(१५)
```
  ७८९४३५२६
  ७२६८०९५
  ३२५७९१८
  ५३२६५९७४६
  १९६६८५४२
  ४५७४९३५८७
 ─────────
  १०९९२९१४१४
```

(१६)
```
  ७८२४८५९६३
  ७९५३९२५७
  ३२६९०४८२
  ५३९६५७५१६४
  ५२४९३७८२१
  ४१७६७८५४७५
 ─────────
  १०९९३०१४१६२
```

(१७)
```
  ४२७१८५७०९२
  ३८६७५१२८९४३
  २९३५८७५१४
  ४७६८७९५४६७
  ६५७४१२८७६७५
  ४७२९५४७८६७
 ─────────
  ११८४८०२०४५५८
```

(१८)
```
  ८६७११८७९४२
  ७४२९५८५७६९३
  ७७८७२८०६४
  ४२४३५९७४१७
  २४७६९२४७५६५
  ५७२१५८५८७७
 ─────────
  ११८४८०२०४५५८
```

(१९)
```
  ७१८९३४५६९८
  ३७२५९३१५६
  ४१५४६०१४५९७
  ७१४४३८७४६१
  ८९७०२५१७४२
  ३७१५८२७१६५६
  ९१५०७४६५३२
 ─────────
  १११५३१६१०८४२
```

(२०)
```
  ७५८२५९३६५८
  १४९३४५५९६
  ३०३७४३८४१६७
  ११४६०११४९१
  ८९५८२७७६५२
  ४६१७०२५१७४६
  ६७०३१२४४३३२
 ─────────
  १६१४१२१०८६४२
```

योगचक्र

१४३४७	९८९७	११३६३	१४४०२	२४५०४
२१९१८	११४४३	१७५९६	११७०७	११८४९
९६८४	३२४७०	१३०८५	१९२६५	९
१६६८१	१३३३४	२१५२७	१०२२९	१२७४२
११८८३	७३६९	१०९४२	१८९१०	२५४०९

यह योग चक्र बालकों को संकलन के अभ्यास के लिये लिखा है। इस में हर एक पंक्ति की संख्याओं का योग ७४५१३ इतना हि होता है। वह पंक्ति चाहे उर्ध्वाधर अर्थात् खडी हो या तिर्यक् अर्थात् बेंड़ी हो वा कर्ण के आकार की अर्थात् तिरछी हो। इस प्रकार से इस में योग के बारह उदाहरण हैं।

दूसरा योग का बड़ा चक्र ।

५६४	१३००	११६९	१०४०	२३७६	१०९८	१४८६	२३२६	१३५८
१३८९	२०३२	१९६१	१६०२	२३१९	९३१	२७९	१४१६	८१८
१७८६	१५७१	९४५	११२७	२०८	२०४६	२००४	११६१	१८९९
१२२७	३६७	१४६९	१६७३	१४४३	१३९८	२११९	१३६३	१६५८
२९९९	९१८	१४६५	३२१२	१२०५	४३५	१८८९	३०२	३२२
१४६३	१६०१	१२०८	८३४	२३८	२३०९	१७११	११९१	२१६२
९४	१२४५	१७२४	५४०	२३२१	१६५३	९८६	२२७१	१९१३
१९८५	१६२८	१७६९	२१९८	१९१५	७३९	८७५	१०१२	६२६
११८०	२०८५	१०३७	५२१	७२२	२१३८	१३९८	१६७५	१९९१

इस बड़े योग चक्र में भी हर एक पंक्ति की संख्याओं का योग १२७४७ इतना हि होता है फिर वह पंक्ति चाहे खड़ी वा वेंडी वा कर्णाकार हो और इस में यह अधिक विशेष है कि जिन में तीन २ कोष्ठ खड़े और तीन २ वेंड़े हों ऐसे हर एक नौ कोष्ठों की संख्याओं का भी योग १२७४७ पहिले के इतना हि होता है इस प्रकार से इस चक्र में योग के उदाहरण ९८ होते हैं। इस से भी अधिक उदाहरण इस में हैं उन को बुद्धिमान् अपनी बुद्धि से जान लेवें।

संकलन के प्रश्न ।

(१) एक मनुष्य का वय जब १८ बरस का था तब उस को एक पुत्र हुआ फिर उस पुत्र का वय जब ४७ बरस का हुआ तब उस के पिता का वय कितना हुआ था सो कहो।

उत्तर, ६५ बरस।

(२) संवत् १८३९ में एक पुरुष का जन्म हुआ और वह ८७ बरस का हो के मर गया तब कहो उस का मरण किस संवत् में हुआ?

उत्तर, संवत् १९२६।

(३) किसी दाता के द्वार पर एक कंगालों का समुदाय भीख मांगने के लिये खड़ा

था। उस समुदाय में १६५ पुरुष, १८३ स्त्री, २०७ लड़के थे। उस दाता ने उन सब कंगालों को एक २ पैसा बांट दिया। तब कहो उस ने कितने पैसे धर्म किया।

उत्तर, ५५५ पैसे।

(४) एक पाठशाला में पढनेहारे लड़कों के आठ वर्ग थे उस में पहिले वर्ग में २७ लड़के पढते थे। दूसरे में ३५, तीसरे में ४४, चौथे में ५६, पांचवे में ६९, छठवें में ७२ सातवें में ७८ और आठवें वर्ग में ८० लड़के पढते थे। तब कहो उस पाठशाला में सब कितने लड़के पढते थे?

उत्तर, ४६१।

(५) किसी पण्डित के पास दस अध्याय का एक बड़ा पुस्तक था उस में पहिला अध्याय २३ पत्र का था, दूसरा ३७, तीसरा २१६, चौथा ४०, पांचवा ६, छठवां ५१, सातवां १२६, अठवां ५८, नौवां ७० और दसवां ११६ पत्र का था तब कहो उस समग्र पुस्तक के कितने पत्र थे?

उत्तर, ७५६।

(६) सात मनुष्य अपने २ खंचिये में कुछ फल रख के अपने गांव से बनारस में बेचने के लिये ले आते थे। उन खंचियों में इस क्रम से फल थे कि पहिले में ३८५, दूसरे में ४०६, तीसरे में १०७६, चौथे में ५६०, पांचवें में ६१७, छठवें में ४०० और सातवें में ७०३। मार्ग में उन सब खंचियों के फल एक ही कुंजड़े ने मोल लिये। तब उस कुंजड़े ने कितने फल मोल लिये सो कहो।

उत्तर, ४१५० फल

(७) पांच मित्रों ने मिलके एक व्यापार किया। उस में एक का धन ७३६४ रुपये था, दूसरे का ९००७ रु०, तीसरे का १३७०६ रु०, चौथे का ६९३५ रु०, और पांचवें का ८७०६ रुपये धन था। तब कहो उस व्यापार में सभों का मिल के कितने रुपये धन था?

उत्तर, ४५७४१।

(८) एक महाजन बड़ा धनवान् था उस के घर में पत्थर के छ कुण्ड रुपयों से भरे हुए थे उन में क्रम से २३१७४०३, ७०६६५८, ३००८९, ६४०८६२, ३०६४१६१, ३२०७८२७ इतने २ रुपये थे। तब उन सब कुण्डों में मिल के कितने रुपये थे सो कहो।

उत्तर, १०००००००।

(९) चार पुरुषों का मिल के एक स्थान में धन गाडा हुआ था उस में पहिले का धन ९०४१०२८ रुपये था। दूसरे का धन पहिले के धन से ४१६३७५५ इतना अधिक था। पहिले का और दूसरे का धन मिल के जितना होगा उस से २५००० रुपये अधिक तीसरे का धन था। और पहिला, दूसरा और तीसरा इन तीनों पुरुषों का मिल के जितना धन होगा उतना अकेले चौथे पुरुष का धन था। तब दूसरे, तीसरे और चौथे पुरुष का धन कितना २ था। और सब का मिल के उस स्थान में कितना धन गाड़ा हुआ था सो कहो।

उत्तर। दूसरे का धन १३२०४७८३ रु०।
तीसरे का धन २२२७०८११ रु०।
चौथे का धन ४४५१६६२२ रु०।
और सभों का मिल के धन ८९०३३२४४ रु०।

(१०) एक राजा के देश में आठ बड़े नगर थे उन में पहिले नगर में २८७०३६ मनुष्य बसते थे। दूसरे में पहिले नगर से १३४८९ इतने मनुष्य अधिक बसते थे। पहिले और दूसरे नगर में जितने बसते थे उन के योग के समान मनुष्य तीसरे नगर में थे। चौथे में दूसरे नगर से ७०२६ इतने मनुष्य अधिक थे। पांचवे में पहिले नगर से ८६०१ इतने मनुष्य अधिक बसते थे। तीसरे, चौथे और पांचवे नगर में जितने मनुष्य बसते थे उन के योग से भी ३००० मनुष्य छठवे नगर में अधिक थे। दूसरे और पांचवे नगर में जितने मनुष्य थे उन के योग के समान सातवे नगर में मनुष्य थे और आठवे नगर में उतने मनुष्य थे जितने पहिले, तीसरे, पांचवे और सातवे नगर में थे। तब हर एक नगर में कितने २ मनुष्य बसते थे और सब नगरों के मनुष्य मिल के कितने थे ? सेा कहेा।

उत्तर, आठों नगरों में क्रम से २८७०३६, ३००५२५, ५८७५६४, ३०७५५१, २९५६४०, ११६४०५५, ५९६४६५, १७६७००८, इतने मनुष्य बसते थे और सब मिल के ५३३६१४७ मनुष्य थे।

(११) ३७०८१४५६ इस संख्या में ९५४२१६३ इस संख्या को दस बार जोड़ देने से अन्त मे येाग क्या होगा सेा कहेा।

उत्तर, १३२५०३०८६ ।

३ व्यवकलन ।

३०। दो संख्याओं में बड़ी संख्या छोटी संख्या से जितनी अधिक होगी उतने बड़ी संख्या के अधिक खण्ड को शेष वा उन दो संख्याओं का अन्तर कहते हैं अर्थात् बड़ी संख्या में से इस का छोटी संख्या के तुल्य एक खण्ड अलग करने से जो बच रहेगा उसी को शेष वा अन्तर कहते हैं। और इस अन्तर के जानने में बड़ी संख्या में से छोटी के तुल्य एक खण्ड को अलगाना यही मुख्य क्रिया है। इस लिये अन्तर के जानने की क्रिया को व्यवकलन (अर्थात् अलगाना) कहते हैं।

३१। व्यवकलन की दो संख्याओं में बड़ी संख्या को वियोज्य और छोटी को वियोजक कहते हैं। और जबकि वियोज्य की संख्या का एक खण्ड वियोजक के समान हो तो दूसरा अवश्य अन्तर के समान होगा इस से स्पष्ट है कि वियोजक और अन्तर इन का योग वियोज्य के तुल्य होता है।

३२। व्यवकलन जानने के लिये पहिले जैसा (२१) वे प्रक्रम में लिखे हुए चक्र से जो दो संख्या ९ से बड़ी नहीं हैं उन का योग तुरंत मन में ले आने का अभ्यास किया है वैसा ही उसी चक्र से जो १८ से बड़ी न हो ऐसी योग संख्या को देख के और जो ९ से बड़ी न हो

ऐसी उसी योग के योज्य योजकों में से एक की संख्या को देख के तुरंत दूसरी की संख्या को मन में ले आने का अभ्यास करो ।

जैसा । योग संख्या १३ है और इस के योज्य योजकों में से एक की संख्या ५ है तो दूसरे की संख्या ८ होगी । यह तुरंत मन में आवे ऐसा अभ्यास करो ।

और जब यह अभ्यास अच्छी भांति हो जायगा तब उसी की सहायता से कोई योग संख्या जो १८ से बड़ी भी हो उन को और उन के योज्य योजकों में जिस की संख्या १० से छोटी है उस को देख के तुरंत दूसरे की संख्या को मन में ले आने का अभ्यास करो ।

जैसा । योग संख्या २५ और उस के योज्य योजकों में से एक की संख्या ८ इन दो संख्याओं को देखते ही योज्य योजकों में से दूसरे की संख्या १७ यह तुरंत मन में आवे ऐसा अभ्यास करो ।

३३ । जो ऊपर के प्रक्रम में अभ्यास करने को लिखा है सो जब अच्छी भांति हो जायगा तब तुम उन दो संख्याओं का अन्तर तुरंत जान सकते हो जिन में बड़ी संख्या अर्थात् वियोज्य २० से छोटी हो और छोटी संख्या अर्थात् वियोजक १० से छोटी हो । क्यों कि जब वियोजक और अन्तर इन का योग वियोज्य होता है तब वियोज्य अर्थात् योग और वियोजक अर्थात् योज्य योजकों में से एक, इन दोनों को जानने से अन्तर का अर्थात् योज्य योजकों में से दूसरे का ज्ञान (३२) वे प्रक्रम से तुरंत हो सकता है ।

जैसा । वियोज्य	९	१३	१६	१९	
वियोजक	५	७	९	९	इत्या०
अन्तर	४	६	७	१०	

३४ । अब कोई दो संख्या एक वा अनेक अङ्कों की हों उन का अन्तर जानने की रीति लिखते हैं ।

रीति । बड़ी संख्या के नीचे छोटी संख्या को इस क्रम से लिखो कि बड़ी के एक, दश इत्यादि स्थान के अङ्कों के नीचे छोटी के एक, दश इत्यादि स्थान के अङ्क रहें तब छोटी संख्या के नीचे एक बेंडी रेखा खींचो । फिर सोचो कि छोटी संख्या के अर्थात् वियोजक के एक आदि स्थान के अङ्कों में कौन २ अङ्क जोड़ देने से बड़ी संख्या के अर्थात् वियोज्य के एक आदि स्थान के अङ्क होते हैं उन २ अङ्कों को क्रम से

खींची हुई रेखा के नीचे अन्तर के एक आदि स्थान में लिखो । इस में जहां वियोजक के किसी अङ्क से उस के ऊपर का वियोज्य का अङ्क छोटा हो वहां उस छोटे अङ्क में १० जोड़ के उस योग को वियोज्य का अङ्क समझो और उस दस से अधिक किये अङ्क का हाथ लगा १ समझ के उस वियोजक के अङ्क के पास के बाईं ओर के अङ्क में १ जोड़ देओ फिर पहिले की नाईं क्रिया करो । यों करने से रेखा के नीचे जो अङ्क होंगे सो अन्तर है ।

रीति के अनुसार वियोज्य के नीचे वियोजक लिखने से जो वियोज्य के अङ्कों से वियोजक के अङ्क थोड़े हों तो वियोज्य के बाईं ओर के कुछ अङ्कों के नीचे वियोजक के अङ्क न रहेंगे तब वहां उतने स्थान में वियोजक के बाईं ओर शून्य समझ के रीति के अनुसार अन्तर करो ।

यहां वियोजक के अङ्क में कौन अङ्क जोड़ देने से उस के ऊपर का वियोज्य का अङ्क बनेगा इस का ज्ञान (३२) और (३३) वे क्रम से अति स्पष्ट है ।

३५ । इस अन्तर करने की रीति की उपपत्ति अति सुगम है । क्यों कि रीति को देखने से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि यहां अन्तर के स्थान में वे अङ्क उत्पन्न किये हैं जिन को वियोजक के अङ्कों में जोड देने से वियोज्य के अङ्क बने और जब कि वियोजक और अन्तर इन का योग वियोज्य के समान है (प्र० ३१) इस लिये अन्तर जानने की जो रीति लिखी है सो ठीक है ।

उदा० (१) ३५४६४७६ और १८३१५२६ इन दो संख्याओं का अन्तर क्या है?

यहां वियोज्य	३५४६४७६	यहां वियोजक के एक स्थान में ६ हैं इस में ३
वियोजक	१८३१५२६	मिलाने से वियोज्य के एक स्थान का अङ्क ९
अन्तर	१७१७९५३	होता है इस लिये अन्तर के एक स्थान में ३

लिखा । इसी प्रकार से आगे २ में ५ मिलाने से ७ होता है इस लिये दूसरे स्थान में ५ लिखा । फिर आगे ५ के ऊपर ४ है उन को १४ समझ के सोचा कि ५ में ९ जोड देने से १४ होते हैं इस लिये तीसरे स्थान में ९ लिखा फिर १४ का हाथ एक लगा समझ के उस को आगे के १ इस अङ्क में जोड़ दिया सो २ हुए । फिर देखा कि २ में ७ जोड़ देने से इस के ऊपर का अङ्क ९ होता है इस लिये चौथे स्थान में ७ लिखा । इसी प्रकार से अन्त तक क्रिया करने से रेखा के नीचे १७१७९५३ ये अङ्क हुए यही अन्तर है ।

यहां व्यवकलन करने के समय इस प्रकार से बोलते हैं ।

छ और तीन नौ, दो और पांच सात, पांच और नौ चौदह के चार, हाथ लगा एक, एक और एक दो और सात नौ, तीन और एक चार, आठ और सात पन्दह के पांच हाथ लगा एक, एक और एक दो और एक तीन ।

उदा० (२) ९५३८०४७ और ६५३०२ इन का अन्तर करो।

यहां वियोज्य ९५३८०४७ यहां अन्तर करने के समय यों बोलते हैं। दो और पांच
विगेजक ६५३०२ सात, चार के चार, तीन और सात दस का शून्य हाथ
अन्तर ९४७२७४५ लगा एक, एक और पांच छ और दो आठ, छ और
सात तेरह के तीन हाथ लगा एक और चार पांच, नौ के नौ।

३६। अन्तर की प्रतीति करने का प्रकार। वियोजक और अन्तर का योग करो। जो वह वियोज्य के समान हो तो जानो कि अन्तर ठीक है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) ८७ − ४९ = ३८

(२) २२५ − ९६ = १२९

(३) ७८५ − ५६३ = २२२

(४) ८४५७ − ४४९१ = ३९६६

(५) १८९४५ − १५५०३ = ३४४२

(६) २९५७४ − १९४७३ = १०१०१

(७) १७५०७८ − १५६४६४ = १८६१४

(८) २००००९ − १०९८ = १९८९११

(९) ७४५०८६ − ६५४४८५ = ९०६०१

(१०) ६९५७४ − ५७२५३८ = १२३२००

(११) १४५८९७८ − ३९३५७९ = १०६२२९९

(१२) १५७९५४७ − ८७०९६ = १४९२४५१

(१३) १८५४६७९७ − ७८७५६९४ = १०६७११०३

(१४) १०००००००० − ९४६८५२१ = ५३१४७९

(१५) १७४९५६७८९ − १२६०७०५ = १७३६९६०८४

(१६) ३४५७९१३४२ − २४५८९५४३१ = ९९८९५९११

(१७) ८५४९७८९८५३ − ७१५७५७९६४२ = १३९२२१०२११

(१८) ४६५७९८५३१५ − ३५९४७५४१५८ = १०६३२३११५७

(१९) १२३४९८७५६७८९ − १०९५८५९६४७५६ = १३९१२७९२०३३

(२०) १०००००००००००० − ९००९०७००५४९ = ९९०९२९९४५१

अन्तरचक्र

९३५०७८४	५४०२७१८	३९४८०६६	१४५४६५२	२४९३४१४
५९३४२७०	३४१९०५७	२५१५२१३	९०३८४४	१६११३६९
३४१६५१४	१९८३६६१	१४३२८५३	५५०८०८	८८२०४५
२५१७७५६	१४३५३९६	१०८२३६०	३५३०३६	७२९३२४
८९८७५८	५४८२६५	३५०४९३	१९७७७२	१५२७२१

इस चक्र में हर एक बेंड़ी पंक्ति में बांईं ओर से पास २ की दो संख्याओं का अन्तर तीसरी संख्या है। और हर एक ऊर्ध्वाधर अर्थात् खड़ी पंक्ति में ऊपर से नीचे की ओर पास २ की दो संख्याओं का अन्तर तीसरी संख्या है। इस प्रकार से इस में व्यवकलन के ३० उदाहरण हैं।

व्यवकलन के प्रश्न ।

(१) एक मनुष्य का वय जब २१ बरस का हुआ तब उस को पुत्र हुआ फिर उस मनुष्य की जब ४३ बरस की अवस्था हुई तब उस की स्त्री जाती रही तो उस स्त्री के मरण समय में पुत्र का वय कितना था ? सो कहो ।

उत्तर, २२ बरस ।

(२) किसी लड़के ने अपने बाप से पूछा बाबू अब मेरा वय कितना हुआ । बाप ने कहा बेटा मेरी स्त्री मेरे से ५ बरस छोटी है अब उस की अवस्था ३० बरस की हुई और इस समय अपने तीनों की अवस्थाओं का योग ७१ होता है इस से तुम अपनी अवस्था जान लेओ इस समय कितनी है। तो उस समय में लड़के का वय कितना था सो कहो ।

उत्तर, १२ बरस ।

(३) किसी महाजन ने एक मनुष्य दस दिन के लिये इस नियम से काम पर रखा कि जिस दिन वह मनुष्य काम पर आवे उस दिन १७ पैसे पावे और जिस दिन वह काम पर न आवे उस दिन उलटा ६ पैसे डांड देवे। फिर वह मनुष्य ७ दिन काम पर आया और दिन नहीं आया तब अन्त में, महाजन ने उस मनुष्य को कितने पैसे दिये ? सो कहो ।

उत्तर, ६२ पैसे

(४) किसी राजा की एक अश्वशाला में १२०० घोड़े थे उन में से ६३६ घोड़े लड़ाई पर गये और २८४ घोड़े गांव पर भेज दिये तो उस अश्वशाला में कितने घोड़े शेष रहे ? सो कहो ।

उत्तर, २७७ घोड़े ।

(५) आर्यभट नामक एक बड़ा ज्योतिषी जिस ने अपने ग्रन्थ में पृथ्वी का भ्रमण लिखा है ईसवी सन् ४७६ में उत्पन्न हुआ । उस काल से सन् १८७५ तक कितने बरस बीते सो कहो ।

उत्तर, १३९९ बरस ।

(६) ब्रह्मगुप्त नामक एक बड़ा ज्योतिषी यहां हो गया उसी के ग्रन्थ को मूल मान के भास्कराचार्य ने अपना सिद्धान्तशिरोमणि ग्रन्थ बनाया । वह ब्रह्मगुप्त सन् ६२८ में उत्पन्न हुआ और भास्कराचार्य का जन्म सन् १११४ में हुआ । तब ब्रह्मगुप्त के जन्म काल से कितने बरस पीछे भास्कराचार्य उत्पन्न हुआ और हर एक जन्म काल से सन् १८७५ तक कितने बरस बीते सो कहो ।

उत्तर, ४८६ बरस पीछे भास्कराचार्य उत्पन्न हुआ ।
और ब्रह्मगुप्त के जन्म काल से १२४७ बरस बीते
भास्कराचार्य .. .. ७६१ .. ..

(७) विक्रमादित्य के संवत् १६३२ में वराहमिहिर नामक एक बड़े ज्योतिषी को मरे १२८८ बरस हुए । तब वराहमिहिर किस संवत् में मरा सो कहो ।

उत्तर, संवत् ६४४ में ।

(८) इटली देश का गालिलियो नामक एक बड़ा ज्योतिषी सन् १५६४ में उत्पन्न हुआ और सन् १६४२ में मर गया । और जिस वर्ष में गालिलियो मरा उसी वर्ष में इंगलिस्थान का न्यूटन नामक बड़ा ज्योतिषी जन्मा और वह सन् १७२७ में मर गया । तब गालिलियो और न्यूटन कितने २ बरस के होके मरे सो कहो ।

उत्तर, गालिलियो ७८ बरस का
न्यूटन ८५ ....

(९) एक धनिक देशाटन करने के लिये १७५८६ रुपये पास लेके घर से चला फिर सब यात्रा कर के जब वह घर पर पहुंचा तब उस के पास केवल ३०८० रुपये बच रहे । तब उस ने मार्ग में कितना व्यय किया सो कहो ।

उत्तर, १४५०६ रुपये ।

(१०) शाके १०३६ में भास्कराचार्य का जन्म हुआ और उस ने शाके ११०५ में ब्रह्मतुल्य नामक ग्रन्थ बनाया । उस समय भास्कराचार्य का वय कितना था सो कहो ।

उत्तर, ६९ बरस ।

(११) कोइ मनुष्य अपने पुत्र के लिये २४७६८ रुपये छोड़ कर मर गया । पीछे पुत्र ने दस बरस में जितना धन प्राप्त किया उतना जो सब संग्रह किये रहता तो उस का और बाप का धन मिलके उस के पास ७७८१५ रुपये धन होता । परंतु उस के पास तब केवल २८१४३ रुपये संग्रह था तब उस पुत्र ने अपने बाप के पीछे दस बरस में कितना धन प्राप्त किया और कितना व्यय किया ? सो कहो ।

उत्तर, ५३०४७ रुपये । इतना धन प्राप्त किया
और ४९६७२ रुपये व्यय किया ।

(१२) २२९१९२३ इस संख्या में ७३०६४१ इस संख्या को ३ बार घटा देने से शेष क्या बचेगा सो कहो ।

उत्तर, १०००००

(१३) कोइ व्यापारी ३७८४ रुपये पास लेके व्यापार के लिये घर से चला । पहिले एक नगर में गया वहां व्यापार में उस को २०७५ रुपये मिले पर उस का वहां १३२७ रुपये व्यय हुआ । फिर वहां से दूसरे नगर में गया । वहां उस को व्यापार में १५३८ रुपये मिले परंतु २३०९ रुपये व्यय हुआ । फिर वहां से वह व्यापारी तीसरे नगर में गया । वहां उस को व्यापार में १९३८७ रुपये मिले और वहां उस का व्यय केवल १०२३ रुपये हुआ । फिर वहां से वह व्यापारी अपने घर पर चला आया तब वह घर से जितना धन लेके चला था उस से कितना अधिक धन फिर घर पर ले आया सो कहो ।

उत्तर, १८३४१ इतने रुपये अधिक धन ले आया ।

(१४) जिस संख्या में ८९५३०२५९ इस संख्या को दस बार जोड़ देने से अन्त का योग १४८७१९५९२७ होगा वह संख्या क्या है ?

उत्तर, ५९१९८३०३७ ।

संकलन और व्यवकलन को लाघव से और शीघ्रता से करने के लिये कुछ विशेष लिखते हैं ।

३७ । जितनी शीघ्रता से १, २, ३, ४, इत्यादि संख्याओं को क्रम से पढने का अभ्यास रहता है उतनी हि शीघ्रता से १००, ९९, ९८, ९७ इत्यादिओं को उलटा पढने का अभ्यास करो । और फिर जैसा १ वृद्धि और ह्रास से आगे पीछे की सब संख्याओं को पढने का अभ्यास हो उसी प्रकार से दो से लेके निदान नौ तक हर एक अङ्क के समान वृद्धि और ह्रास से किसी संख्या के आगे और पीछे की संख्याओं को शीघ्रता से पढने का अभ्यास करो । जैसा ५ से लेके ७ वृद्धि से ५, १२, १९, २६, ३३ इत्यादि संख्याओं को उसी शीघ्रता से पढने का अभ्यास करो जैसे १, २, ३, ४, ५, इत्यादिओं को पढते हो । इसी भांति ५० के पीछे ७ ह्रास करके ५०, ४३, ३६, २९, २२ आदिओं को पढो ।

३८ । जो एक अङ्क की दो संख्याओं में कितना भेद है यह जानना हो तो तुरंत वह संख्या मन में ले आओ जिस को छोटी में जोड़ देने से योग बड़ी के तुल्य हो । जैसा ३ और ७ को देख के तुरंत ४ को मन में लाने का अभ्यास करो । और ७ में ३ गये बचे ४ यों कहने की अपेक्षा न रखो । इसी भांति अन्तर करने में वियोजक के किसी अङ्क से जो उस के ऊपर का वियोज्य का अङ्क छोटा हो जैसा वियोजक में ७ हो और उस के ऊपर वियोज्य में ३ हो तो अन्तर स्थान में तुरंत ६ की उपस्थिति हो और ३ में १० मिलाये १३ हुए उस में ७ गये ६ बचे यों कहने की आवश्यकता न रहे ।

३९ । इसी भांति जब किसी दो वा तीन अङ्कों की संख्या को उस के ऊपर की संख्या के एक अङ्क में घटाना उपस्थित हो जैसा १५ को ३ में घटाना हो तब यहां ३ को २३ समझ के तुरंत ८ मन में लाओ । यों १३ और ४ यहां १९ और १ चौदह । १४, २ यहां १४ और ८ बाईस । २२, २ यहां २२ और ० बाईस इसी भांति कहने का अभ्यास करो ।

४० । जिन संख्याओं का संकलन करना है उन को उचित प्रकार से रखने के अनन्तर हर एक स्थान के ऊर्ध्वाधर अङ्कों के योग के लिये

पहिले ऊपर के दो अङ्कों का योग करके उस में नीचे का एक २ अङ्क जोड़ते हैं। इस हर एक जोड़ में केवल जोड़ की संख्या को पढ़ो।

जैसा। नीचे योग करने की संख्या लिखी हैं और उन की दहनी ओर ऊर्ध्वाधर पङ्क्तिओं के योग करने में जो जोड़ पढ़ने चाहिये सो लिखे हैं। जिस अङ्क पर एक स्वर है सो योग स्थान में लिखो जिस पर दो स्वर हैं सो हाथ लगा समझो।

८२४७	सात, पन्द्रह सोलह पचीस सत्ताईस २″७′;
१७५३८	छ, नौ, ग्यारह, उनीस, अठाईस २″८′;
५०४२१	चार, नौ, तेरह, पन्द्रह, उनीस १″९′;
१२८९	नौ, सोलह सत्रह १″७′;
३०४९२	दो, सात, दस १″०′;
१०७९८७	

४१। व्यवकलन का उदाहरण नीचें लिखा है उस के दहनी ओर जो अङ्क लिखे हैं अन्तर करने में केवल उन्ही को पढ़ना आवश्यक है। जैसा।

वियोज्य	८५४९०२७१५३२	५ और ७′. ८ और ५′, ५ और ०′, २ और ९′, ९
वियोजक	६९८३१०८२४७५	और ८′, १ और १′, १ और ९′, ४ और ५′, ८ और
अन्तर वा शेष	१५६५९१८९०५७	६′, १० और ५′, ७ और १′। इस प्रकार से अन्तर

करने का अभ्यास करो। और १२ में से गये ५ बचे ७ इत्यादि मत पढ़ो क्यों कि जब ७ का ज्ञान हुआ तब फिर ७ किस से मिले उस का पढ़ना आवश्यक नहीं है।

४ गुणन।

४२। दो संख्याओं में एक संख्या को दूसरी संख्या जितनी होगी उतनी बार लेने से जो फल होगा उस को गुणनफल कहते हैं। इस एक संख्या को गुण्य और दूसरी को गुणक कहते हैं। और गुणनफल जानने की क्रिया को गुणनकर्म वा गुणन कहते हैं।

जैसा। ५ और ४ ये दो संख्या हैं। इन में पांच एक बार लेने से ५ हि होते हैं, दो बार लेने से १०, तीन बार लेने से १५ और चार बार लेने से २० होते हैं। यहां ५ गुण्य, ४ गुणक और २० गुणनफल है। यहां ५ को ४ से गुण देने से वा चार गुणा करने से १० होते हैं यों बोलते हैं।

४३। ऊपर के मजमून से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि गुणक की जितनी संख्या होगी उतनी गुण्य तुल्य संख्याओं का योग गुणनफल है।

इस लिये गुणन भी एक संकलन का भेद है जिस में संकलन की हर एक संख्या एकरूप अर्थात् समान है ।

४४ । इस प्रक्रम में गुणन के कुछ सिद्धान्त लिखते हैं ।

(१) पहिला सिद्धान्त । गुणन की दो संख्याओं में चाहो तिस को गुण्य मानो और दूसरी को गुणक मानो तो भी गुणनफल तुल्य हि होगा ।

जैसा । ५ और ४ इन में चाहो ५ को ४ से गुण देओ वा ४ को ५ से गुणो अर्थात् ५ को ४ स्थान में रख के उन का योग करो वा ४ को ५ स्थान में रख के उन का योग करो तो भी गुणनफल २० ही होगा ।

क्यों कि पांच एकों का समूह ५ है उस को ४ स्थान में उस के नीचे उसी को लिखने से यह नीचे लिखा हुआ २० एकों का समूह बनता है । यही ५ और ४ का गुणनफल है । इस समूह को देखने से स्पष्ट जान पड़ता है कि जैसा ५ एकों के समूह को ४ स्थान में उस के नीचे उसी को रखने से बीस एकों का समूह बना है वैसा ही ऊर्ध्वाधर चार एकों के समूह को पांच स्थान में उस के आगे उसी को रखने से वही २० एकों का समूह बना है । इस से स्पष्ट सिद्ध होता है कि ५ और ४ इन में ५ गुण्य और ४ गुणक हो वा ४ गुण्य और ५ गुणक हो तो भी गुणनफल २० ही होगा । अर्थात् गुणन की दो संख्याओं में किसी एक को गुण्य और दूसरे को गुणक मानो तो भी गुणनफल तुल्य होगा ।

१, १, १, १, १,
१, १, १, १, १,
१, १, १, १, १,
१, १, १, १, १,

(२) दूसरा सिद्धान्त । गुणन की दो संख्याओं में एक संख्या के चाहो उतने विभाग करो और हर एक विभाग को दूसरी संख्या से गुण देओ । उन सब गुणनफलों का योग उन दो गुणन की संख्याओं के गुणनफल के तुल्य होता है ।

जैसा । ५ और ४ ये दो गुणन की संख्या हैं इन में ५ के २ और ३ ये दो विभाग हैं । हर एक विभाग का और ४ का गुणनफल क्रम से ८ और १२ है इन का योग २० । यह गुणन की ५ और ४ इन दो संख्याओं के गुणनफल के तुल्य है ।

क्यों कि ऊपर के चक्र में बीच में एक खड़ी रेखा खींच के दो कोष्ठ किये हैं उन को देखने से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि पहिले कोष्ठ में ३ और ४ के गुणनफल के १२ तुल्य एकों का समूह है और दूसरे में २ और ४ के गुणनफल के ८ तुल्य एकों का समूह है और ये दोनो समूह मिल के ५ और ४ के गुणनफल के तुल्य एक हैं ।

१, १, १,	१, १,
१, १, १,	१, १,
१, १, १,	१, १,
१, १, १,	१, १,

अनुमान । गुणन की दो संख्याओं में एक के लिये ऐसे दो राशि कल्पना करो कि जिन का अन्तर वह संख्या हो तब हर एक राशि को दूसरी

संख्या से गुण देओ । उन दो गुणनफलों का अन्तर उन दो गुणन की संख्याओं के गुणनफल के तुल्य होगा ।

जैसा । ३ और ४ ये दो गुणन की संख्या हैं। इन में ३ के लिये ५ और २ ये ऐसे दो राशि कल्पना किये कि जिन का अन्तर वही संख्या ३ है तब हरएक राशि का और ४ का गुणनफल क्रम से २० और ८ है । इन का अन्तर १२ यह गुणन की ३ और ४ इन दो संख्याओं के गुणनफल के समान है ।

(३) तीसरा सिद्धान्त । गुण्यगुणकों में गुणक के ऐसे दो खण्ड कल्पना करो कि जिन का गुणनफल उस गुणक के तुल्य हो । तब गुण्य को पहिले एक खण्ड से गुण के उस गुणनफल को दूसरे खण्ड से गुण देने से फल उन्हीं गुण्यगुणकों के गुणनफल के समान होता है ।

जैसा । ५ गुण्य और ६ गुणक है । इन में ६ के गुण्यगुणकरूप खण्ड ३ और २ हैं । अब ५ को पहिले ३ से गुण दिया १५ हुआ । फिर १५ को २ से गुण देने से ३० हुआ । यह ५ और ६ के गुणनफल के ३० समान है । अथवा ५ को पहिले २ से गुण दिया १० हुआ फिर १० को ३ से गुण दिया ३० हुआ । यह भी वही गुणनफल है ।

इस की युक्ति यह है ।

नीचे लिखे हुए चक्रों को देखने से स्पष्ट है कि हर एक चक्र में ५ और ६ के गुणनफल के समान एकों का समूह है । उन में पहिले चक्र के बीच में एक बेंडी रेखा, खींचने से समान दो कोष्ठ हुए हैं । उन में हर एक में ५ और ३ के गुणनफल के समान १५ एकों का समूह है और दूसरे चक्र में दो बेंडी रेखा खींचने से समान तीन कोष्ठ हुए हैं उन में हर एक में ५ और २ के गुणनफल के समान १० एकों का समूह है । इस प्रकार से पहिले चक्र को देखने से सिद्ध होता है कि ५ को पहिले ३ से गुणदेओ उस गुणनफल को फिर २ से गुण देओ तो गुणनफल ५ और ६ के गुणनफल के समान होगा और दूसरे चक्र को देखने से सिद्ध होता है कि ५ को पहिले २ से गुण देओ फिर उस फल को ३ से गुण देओ तो भी गुणनफल वही होगा । अर्थात् ५ और ६ के गुणनफल के समान होगा ।

१ चक्र
१,१,१,१,१,
१,१,१,१,१,
१,१,१,१,१,
—
१,१,१,१,१,
१,१,१,१,१,
१,१,१,१,१,

२ चक्र
१,१,१,१,१,
१,१,१,१,१,
—
१,१,१,१,१,
१,१,१,१,१,
—
१,१,१,१,१,
१,१,१,१,१,

अनुमान १ । ऊपर की युक्ति को देखने से तुरंत मन में आवेगा कि जो गुणक के दो से अधिक भी ऐसे खण्ड कल्पना करो कि जिन का गुणनफल उस गुणक के तुल्य हो और उन सब खण्डों से गुण्य को गुण देओ तो अन्त में गुणनफल वही होगा जो उन गुण्य गुणकों का गुणनफल है ।

अनुमान २। जो तीन वा अधिक संख्याओं का गुणनफल करना हो तो गुणन की संख्याओं को चाहो उस क्रम से रख के परस्पर गुण देओ तो भी गुणनफल वही होगा ।

(४) चौथा सिद्धान्त । गुण्य और गुणक इन दोनों में जो कोई शून्य हो तो गुणनफल शून्य होगा और जो उन दोनों में कोई १ हो तो गुणनफल दूसरे के समान होगा ।

इस की युक्ति यह है ।

जब कि गुण्य की संख्या को गुणक की संख्या जितनी होगी उतनी वार लेने से जो फल होगा सो हि गुणनफल है (४२ प्रक्रम देखो) तब जो गुण्य शून्य हो तो गुणक की संख्या चाहो सो हो पर उतनी वार शून्य को लेने से फल शून्य हि होगा। और जो गुणक शून्य हो तो गुण्य की संख्या को शून्य वार लेने से अर्थात् नहीं लेने से फल शून्य हि होगा। इस लिये किसी संख्या से शून्य को गुण देओ वा शून्य से किसी संख्या को गुण देओ तो भी गुणनफल शून्य हि होगा ।

इसी भांति जो गुण्य १ हो तो गुणक की संख्या जो होगी उतनी वार १ को लेने से फल गुणक की संख्या के तुल्य एकों का समूह होगा अर्थात् गुणक के तुल्य होगा। और जो गुणक १ हो तो गुण्य की संख्या को एक वार लेने से फल गुण्य के तुल्य होगा इस लिये किसी संख्या से १ को गुण देओ वा १ से किसी संख्या को गुण देओ तो गुणनफल उसी संख्या के तुल्य होगा ।

(५) पांचवा सिद्धान्त । किसी संख्या को १० से गुण देना हो तो उस संख्या की दहनी ओर एक शून्य लिख देओ सो गुणनफल होगा ।

जैसा। ३५२७ इस संख्या को १० से गुण देना हो तो गुणनफल ३५२७० यह होगा ।

इस की युक्ति यह है ।

३५२७ इस संख्या के ३ सहस्र, ५ शतक २ दशक और ७ एक ये राशि हैं। अब हर एक राशि को दशगुण करके उन सभों का योग करो तो वह (इसी प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त से) उस संख्या से दशगुण होगा। इस लिये उन राशियों को दशगुण करो तो ये होते हैं। ३ दश सहस्र, ५ दश शत, २ दश दश, और ७ दश एक अर्थात् ३ अयुत, ५ सहस्र २ शत और ७ दशक। इन सब दशगुण विभागों का योग वह संख्या दश गुण है सो संख्योल्लेखन के विधि से ३५२७० यों लिखी जायगी। इस लिये ३५२७ इस संख्या को १० से गुण देओ तो गुणनफल ३५२७० यह होगा ।

इसी प्रकार से सिद्ध होता है कि जो किसी संख्या को १००, १०००, १०००० इत्यादि संख्याओं से गुण देना हो तो उस संख्या की दहनी ओर क्रम से दो, तीन, चार इत्यादि शून्य लिख देओ सो क्रम से गुणनफल होंगे ।

४५ । पहिले (४२) और (४३) वे प्रक्रम में जो गुणनफल का लक्षण लिखा है उस से कोइ दो संख्याओं का गुणनफल सिद्ध हो सकता है परंतु उस में बहुत गौरव है इस कारण लाघव से गुणनफल बनने के लिये अब गुणन के अनेक प्रकार लिखते हैं ।

४६ । पहिला प्रकार । जब गुण्य और गुणक दोनों एक अङ्क के हैं अर्थात् दोनों दस से छोटे हैं तब इस नीचे लिखे हुए चक्र में गुण्य के अङ्क के नीचे जो गुणक के अङ्क के सामने की पंक्ति में संख्या होगी सो हीं गुणनफल जानो ।

गुणक के अङ्क \ गुण्य के अङ्क	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
०	०	०	०	०	०	०	०	०	०	०
१	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
२	०	२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८
३	०	३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७
४	०	४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६
५	०	५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५
६	०	६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४
७	०	७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३
८	०	८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२
९	०	९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१

जैसा । ७ गुण्य और ५ गुणक है अर्थात् ७ को ५ से गुण के गुणनफल जानना है तब ऊपर के चक्र में ७ इस गुण्य के अङ्क के नीचे ५ इस गुणक के अङ्क के सामने की पंक्ति में ३५ है । इस लिये ७ और ५ इन का गुणनफल ३५ है ।

इस भांति इस चक्र में गुण्य और गुणक के अङ्कों के गुणनफल सब सिद्ध लिखे हैं ।

४७। ऊपर के चक्र में जो गुणनफल लिखे हैं वे सब (४२) और (४३) वे प्रक्रम में जो गुणनफल का लक्षण लिखा है उस से सिद्ध किये हैं। उस से उन की उपपत्ति स्पष्ट है। ये सब गुणनफल अभ्यास कर के अवश्य कण्ठ करने चाहिये।

४८। लड़के लोग जो पहाड़े पढते हैं वे भी सब इसी प्रकार से सिद्ध किये हुए गुणनफल हैं उन में जिस संख्या का पहाड़ा हो वह संख्या गुण्य है और १ से १० तक संख्या अलग २ गुणक हैं और पहाड़े की जो दस संख्या हैं वे क्रम से उन गुण्यगुणकों के गुणनफल हैं। (४६) वे प्रक्रम में जो चक्र में गुणनफल लिखे हैं वे सब ९ तक के पहाड़े हैं। यद्यपि इतने ही पहाड़े कण्ठ करने से सब गुणन की क्रिया का निर्वाह हो जाता है तो भी गुणन में और आगे भागहार में लाघव से फल सिद्ध करने के लिये १ से ३० तक संख्याओं के पहाड़े अवश्य कण्ठ करने चाहिये।

लड़कों को अभ्यास के लिये यहां नीचे १ से ३० तक संख्याओं के पहाड़े लिखे हैं

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५
२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८	२०	२२	२४	२६	२८	३०
३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७	३०	३३	३६	३९	४२	४५
४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६	४०	४४	४८	५२	५६	६०
५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०	५५	६०	६५	७०	७५
६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४	६०	६६	७२	७८	८४	९०
७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३	७०	७७	८४	९१	९८	१०५
८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२	८०	८८	९६	१०४	११२	१२०
९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१	९०	९९	१०८	११७	१२६	१३५
१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	११०	१२०	१३०	१४०	१५०

१६	१७	१८	१९	२०	२१	२२	२३	२४	२५	२६	२७	२८	२९	३०
३२	३४	३६	३८	४०	४२	४४	४६	४८	५०	५२	५४	५६	५८	६०
४८	५१	५४	५७	६०	६३	६६	६९	७२	७५	७८	८१	८४	८७	९०
६४	६८	७२	७६	८०	८४	८८	९२	९६	१००	१०४	१०८	११२	११६	१२०
८०	८५	९०	९५	१००	१०५	११०	११५	१२०	१२५	१३०	१३५	१४०	१४५	१५०
९६	१०२	१०८	११४	१२०	१२६	१३२	१३८	१४४	१५०	१५६	१६२	१६८	१७४	१८०
११२	११९	१२६	१३३	१४०	१४७	१५४	१६१	१६८	१७५	१८२	१८९	१९६	२०३	२१०
१२८	१३६	१४४	१५२	१६०	१६८	१७६	१८४	१९२	२००	२०८	२१६	२२४	२३२	२४०
१४४	१५३	१६२	१७१	१८०	१८९	१९८	२०७	२१६	२२५	२३४	२४३	२५२	२६१	२७०
१६०	१७०	१८०	१९०	२००	२१०	२२०	२३०	२४०	२५०	२६०	२७०	२८०	२९०	३००

४६। गुणन का प्रकार दूसरा। जब गुण्य में अनेक अङ्क हैं और गुणक में एक अङ्क है वा १० के ऊपर जहां तक पहाड़े कण्ठ हों उस के भीतर कोइ संख्या गुणक है।

रीति। पहिले गुण्य की संख्या लिख के उस के एकस्थान के अङ्क के नीचे गुणक की संख्या लिखो और उस के नीचे एक रेखा खींचो। फिर गुण्य के एकस्थान के अङ्क को गुणक से गुण देओ जो फल होगा उस के एकस्थान के अङ्क को उस रेखा के नीचे गुणनफल के एकस्थान में लिखो और दशक के अङ्क को हाथ लगा समझो। फिर गुण्य के दशस्थान के अङ्क को गुणक से गुण के फल में उस हाथ लगे अङ्क को जोड़ देओ उस जोड़ के एकस्थान के अङ्क को गुणनफल के दशस्थान में लिखो और दशक के अङ्क को हाथ लगा समझो। फिर इसी प्रकार से आगे भी हर एक जोड़ के एकस्थान के अङ्क को क्रम से गुणनफल के शत आदि स्थान में लिखो और दशक के अङ्क को हाथ लगा समझो। यों अन्त तक करो अन्त में जो जोड़ की संख्या होगी सो सब की सब गुणनफल के अन्तस्थान में लिख देओ। तब जो रेखा के नीचे संख्या होगी सो गुणनफल है।

उदा० (१) ३५४७ इस संख्या को ८ से गुण के गुणनफल कहो।

यहां गुण्य	३५४७
गुणक	८
गुणनफल	२८३७६

यहां गुणन करने के समय यों बोलते हैं। आठ सत्ते छप्पन के छ (यों कह के रेखा के नीचे गुणनफल के एक स्थान में ६ लिख के फिर बोलते हैं कि) हाथ लगे पांच। आठ चौके बत्तीस और पांच सैंतीस के सात (तब गुणनफल के दशकस्थान में ७ लिख के फिर कहते हैं कि) हाथ लगे तीन (फिर इसी प्रकार से आगे भी) आठ पंचे चालीस और तीन तिरतालिस के तीन हाथ लगे चार। आठ तियां चौबीस और चार अट्ठाईस के अट्ठाईस।

यों गुणक के पहाड़े के आश्रय से गुण्य को गुण देते हैं।

अथवा कोइ २ लोग गुण्य के हर एक अङ्क के पहाड़े पर से गुणनफल बनाते हैं। तब यों बोलते हैं। सातअट्ठे छप्पन के छ हाथ लगे पांच। चार अट्ठे बत्तीस और पांच सैंतीस के सात हाथ लगे तीन। पांच अट्ठे चालीस और तीन तिरतालीस के तीन हाथ लगे चार। तीन अट्ठे चौबीस और चार अट्ठाईस के अट्ठाईस।

उदा० (२) ५२०८७ इस को ९ से गुण देओ।

यहां गुण्य	५२०८७
गुणक	९
गुणनफल	४६८७८३

यहां यों बोलते हैं। नौ सत्ते तिरसठ के तीन हाथ लगे छ। नौ अट्ठे बहत्तर और छ अठहत्तर के आठ हाथ लगे सात। नौ शून्य शून्य सात के सात। नौ दूना अठारह के आठ हाथ लगा एक। नौ पंचे पैंतालीस और एक छियालीस के छियालीस।

उदा० (३) ३८००६९००० इस को ७ से गुण देओ ।

यहां गुण्य	३८००६९०००	यहां यों बोलते हैं । सात शून्य शून्य ।
गुणक	७	सात शून्य शून्य । सात शून्य शून्य । सात
गुणनफल	२६६०४८३०००	नवां तिरसठ के तीन हाथ लगे छ । सात

छक्के बयालीस और छ अड़तालीस के आठ हाथ लगे चार । सात शून्य शून्य । सात अट्ठे छप्पन के छ हाथ लगे पांच । सात तिया इक्कीस और पांच छब्बीस के छब्बीस ।

५० । ऊपर के प्रक्रम में जो गुणन की रीति लिखी है उस की उपपत्ति दिखलाते हैं ।

जब ३५४७ इस को ८ से गुण देना है तब इस गुण्य के ७ एक, ४ दशक, ५ शत और ३ सहस्र ये विभाग हैं । अब जो हर एक विभाग को ८ से गुण देओ तब गुणनफल क्रम से ५६ एक, ३२ दशक, ४० शत और २४ सहस्र ये होंगे और इन सभों का योग (४४ वे प्रक्रम के २ सिद्धान्त से) ३५४७ और ८ इन का गुणनफल है ।

अब ५६ एक अर्थात् .. .. ५ दश और ६ एक
३२ दशक .. .. .. ३ शत और २ दश
४० शत .. .. ४ सहस्र ० शत
और २४ सहस्र .. २ अयुत और ४ सहस्र

अर्थात् ५६ ए०, ३२ द०, ४० श०, और २४ स० इन विभागों को एक २ स्थान पीछे हटा के एक के नीचे एक लीख देओ तब सजातीय अङ्कों के नीचे सजातीय अङ्क आवेंगे । उन सभों का योग करो सोहि गुणनफल होगा ।

```
   ५६
  ३२
 ४०
२४
------
२८३७६
```

इस से गुणन के दूसरे प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

५१ । गुणन का प्रकार तीसरा जब गुणक में अनेक अङ्क हैं ।

रीति । गुण्य की संख्या के नीचे गुणक की संख्या इस प्रकार से लिखो कि गुण्य के एक आदि स्थान के अङ्कों के नीचे क्रम से गुणक के एक आदि स्थान के अङ्क आवें फिर गुणक के नीचे एक रेखा खींचो । तब गुणक के एकस्थान के अङ्क से सब गुण्य को ऊपर की रीति के अनुसार गुण के गुणनफल उस रेखा के नीचे लिखो । फिर गुणक के दशस्थान के अङ्क से समग्र गुण्य को गुण के वह गुणनफल पहिले गुणनफल के नीचे एकस्थान पीछे हटा के लिखो अर्थात् ऐसे क्रम से लिखो कि पहिले गुणनफल के दश आदि स्थान के अङ्कों के नीचे क्रम से दूसरे गुणनफल के एक आदि स्थान के अङ्क आवें । इसी प्रकार से गुणक के और भी हर एक अङ्क से गुण्य को गुण के गुणनफल क्रम से पूर्व २ गुणनफल के नीचे एक २ स्थान पीछे हटा के लिखो और फिर सभों का योग करो सो उन गुण्यगुणकों का पूरा गुणनफल है ।

जो गुणक के अङ्कों के बीच में कोइ शून्य हो तो उस शून्य से गुण्य को गुण देने से फल शून्य हि होगा। इस लिये उस शून्य के गुणनफल के स्थान में कुछ मत लीखो। और फिर शून्य के पास के बांई ओर के अङ्क से गुण्य को गुण देने से जो गुणनफल होगा उस को उस के ऊपर के गुणनफल के नीचें दो स्थान पीछे हटा के लिखो क्योंकि शून्य के गुणनफल का एकस्थान वैसा हि छोड़ देना चाहिये। इसी भांति जो गुणक में निरन्तर दो वा अधिक शून्य होवें तो उन के भी शून्य गुणनफलों के उतने स्थान छोड़ देओ फिर ऊपर लिखी हुई क्रिया के अनुसार सब गुणन करो।

उदा० (१) ५८७९ इस को ४३६ इस से गुण देओ।

यहां गुण्य	५८७९
गुणक	४३६
	३५२७४
	१७६३७
	२३५१६
गुणनफल	२५६३२४४

उदा० (२) ७४२०८३ इस को ८०३५४ इस से गुण देओ।

यहां गुण्य	७४२०८३
गुणक	८०३५४
	२९६८३३२
	३७१०४१५
	२२२६२४९
	५९३६६६४
गुणनफल	५९६२९३३७३८२

५२। ऊपर के प्रक्रम में जो गुणनफल की रीति लिखी है उस की युक्ति।

जब ५८७९ इस को ४३६ इस से गुण देना है तब (४४) वे प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त से स्पष्ट है कि ४३६ के जो ६, ३० और ४०० ये विभाग हैं इन से ५८७९ इस संख्या को अलग२ गुण देओ तब उन सब गुणनफलों का योग ५८७९ और ४३६ इन दो संख्याओं का गुणनफल होगा। अब

५८७९ और ६ इन का गुणनफल ३५२७४ है।

५८७९ और ३० इन का गुणनफल वही है जो ५८७९ इस को ३ से गुण के गुणनफल पर एक शून्य लिख देने से संख्या बने। इस का कारण (४४) वे प्रक्रम के तीसरे और पांचवे सिद्धान्त से स्पष्ट है। इस लिये वह गुणनफल १७६३७० है।

इसी भांति ५८७९ और ४०० इन का गुणनफल २३५१६०० है।

इन तीनों गुणनफलों का योग पूरा गुणनफल है । परंतु इस में दूसरे आदि गुणनफलों पर जो शून्य रहते हैं उन का छेंक के जो हर एक गुणनफल को क्रम से एक २ स्थान पीछे हटा के लिखो और उन का योग करो तो भी योग वही होगा जो शून्य सहित गुणनफलों का योग है ।

जैसा । शून्य सहित गुणनफल	शून्य छेंके हुए गुणनफल
३५२७४	३५२७४
१७६३७०	१७६३७
२३५१६००	२३५१६
तीनों का योग २५६३२४४	तीनों का योग २५६३२४४

ये दोनों योग एकरूप हि हैं इस लिये यह दूसरा योग भी पूरा गुणनफल है । इस से (५१) वे प्रक्रम में जो रीति लिखी है उस की युक्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

५३ । अनुमान । गुण्य और गुणक इन दोनों में किसी एक के वा दोनों के ऊपर जो कुछ शून्य हों तो लाघव के लिये वे सब शून्य छोड़ के बचे हुए गुण्यगुणकों का पहिले गुणनफल करो । फिर गुण्यगुणकों में किसी एक के वा दोनों के मिलके जितने ऊपर के शून्य छोड़ दिये हों उतने सब शून्य उस गुणनफल पर लिख देओ सो पूरा गुणनफल है ।

जैसा । ६७०० इस को ४२० से गुण देना है ।

तब ६७०० इस रीति की उपपत्ति यह है ।
४२० जब ६७०० इस को ४२० से गुण देना है तब स्पष्ट है कि
१३४ ६७०० इस को ४२ से गुण के फिर उस को १० से गुण देओ ।
२६८ परंतु ६७०० यह ६७ और १०० इन का गुणनफल है इस
२८१४००० को ४२ से गुण देने से वही गुणनफल होगा जो ६७ को ४२ से गुण के फल के ऊपर दो शून्य लिख देने से संख्या बने । फिर उस को १० से गुण देने के लिये उस पर और एक शून्य लिख देओ । इस से यह अर्थ सिद्ध होता है कि जब ६७०० इस को ४२० से गुण देना है तब पहिले ६७ को ४२ से गुण के उस गुणनफल के ऊपर दो और एक मिल के तीन शून्य लिख देओ सो ६७०० और ४२० इन का गुणनफल होगा । इस से इस रीति की उपपत्ति अति स्पष्ट है ।

५४ । गुणनफल की प्रतीति करने का प्रकार । गुण्यगुणकों में गुण्य के स्थान में गुणक को और गुणक के स्थान में गुण्य को लिख के पूर्व प्रकार से गुणनफल सिद्ध करो जो वह पहिले सिद्ध हुए गुणनफल के समान हो तो प्रायः वह गुणनफल शुद्ध होगा । इस की युक्ति (४४) वे प्रक्रम के पहिले सिद्धान्त से स्पष्ट है । इस के और प्रकारों के लिये आगे (७७) वे प्रक्रम से ले के (८५) वे प्रक्रम तक देखो ।

५५ । पहिले (४२) वे प्रक्रम में दिखलाया है कि गुणक की जितनी संख्या होगी उतनी बार गुण्य को लेने से जो फल होगा सो गुणनफल है । इस लिये यहां यह अवश्य जानना चाहिये कि गुण्यगुणकों में गुणक केवल संख्या होवे वा दोनों केवल संख्यात्मक होवें परंतु दोनों संख्येय न होवें (संख्येय का लक्षण तीसरे प्रक्रम में देखो) और जिस जाति का गुण्य होगा उसी जाति का गुणनफल होगा । अर्थात् जो गुण्य और गुणक ये दोनों केवल संख्या हों तो गुणनफल केवल संख्यात्मक होगा और जो उन में गुण्य संख्येय हो तो गुणनफल भी गुण्य की जाति का संख्येय होगा ।

जैसा । ४ इस संख्या कों तिगुनी करना है अर्थात् ४ इस संख्या को तीन बार लेना है तब फल १२ होगा । यह अवश्य संख्यात्मक होगा । परंतु जो ४ रुपयों को तिगुना करना हो अर्थात् ४ रुपयों को तीन बार लेना हो तो जो फल १२ होगा सो अवश्य रुपये होंगे । यह अति स्पष्ट है । और जो कोइ यों पूछे कि ४ रुपयों को ३ रुपयों से गुण देओ तो इस का कुछ अर्थ नहीं है इस लिये गुण्य और गुणक ये दोनों संख्येय नहीं हो सकते ।

अभ्यास के लिये गुणन के उदाहरण ।

उदाहरण	गुण्य	गुणक	गुणनफल
(१)	३४७	२	६९४
(२)	२६५८	३	७९७४
(३)	६०९२७	४	२४३७०८
(४)	८१६८३	५	४०८४१५
(५)	१२०८४९	६	७२५०९४
(६)	३८२०५४	७	२६७४३७८
(७)	४०९३२७	८	३२७४६१६
(८)	४८२०१४	९	४३३८१२६
(९)	५१३८७४	११	५६५२६१४
(१०)	६३५४०९	१२	७६२४९०८
(११)	७०५९३८	१३	९१७७१९४
(१२)	८३४००६	१४	११६७६०८४
(१३)	३२०५७४२	१९	६०९०९०९८
(१४)	४१८३५९०	२६	१०८७७३३४०
(१५)	४२६१५०७	५८	२४७१६७४०६

(१६) ६२५४०८३
　　　　　८६
　　५३७८५११३८

(१७) ७८५४२१९
　　　　３१७
　　२४८९७८७४२३

(१८) ८३६४२५
　　　　१७२९
　　१४४६१७८८२५

(१९) ८५२१४७
　　　　३८२५
　　३२५९४६२२७५

(२०) ९३४२१८
　　　　५९८३१
　　५५८९५१९७१५८

(२१) ७३५४०००
　　　　२९३००
　　२१५४७२२०००००

(२२) ४५२१९८०३
　　　　८९३२०३४
　　४०३८७८०२१७६७३०२

(२३) ३४२८५७०५१८
　　　　६४१८३७१५९
　　२२००५८३९६०७०४२७८३६२

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) ३७५ को ३, ४ और ५ से अलग २ गुण के गुणनफल कहो ।
उत्तर, क्रम से गुणनफल ११२५, १५०० और १८७५ ।

(२) ७०९ को ६, ७, ८ और ९ से अलग २ गुण के क्रम से गुणनफल कहो ।
उत्तर, ४२५४, ४९६३, ५६७२ और ६३८१ ये क्रम से गुणनफल हैं ।

(३) १९०८ को ११, १३ और १५ से गुण के अलग २ गुणनफल कहो ।
उत्तर, २०९८८, २४८०४ और २८६२० ।

(४) ३१५७ को १७, २८, ३५ और ४९ से अलग २ गुण देओ ।
उत्तर, ५३६६९, ८८३९६, ११०४९५ और १५४६९३ ।

(५) २०३७८ इस को ५३, ८७, १०६, २३९ और ३०४ से अलग २ गुण देओ ।
उत्तर, १०८००३४, १७७२८८६, २१६००६८, ४८७०३४२ और ६१९४९१२ ।

(६) ९८७६५४३२१० इस संख्या को ९, ८, ७, ६, ५, ४, ३, २ और १ इन से गुण के अलग २ गुणनफल कहो ।
उत्तर, ८८८८८८८८८९०, ७९०१२३४५६८०, ६९१३५८०२४७०, ५९२५९२५९२६०, ४९३८२७१६०५०, ३९५०६१७२८४०, २९६२९६२९६३०, १९७५३०८६४२० और ९८७६५४३२१० ।

(७) ३९५८०१२ को ३१९ से, १५२२०७ को ६५७ से और ३८१२५४ को ७३०९ से गुण के अलग २ गुणनफल कहो ।
उत्तर, १२६२६०५८२८, ९९९९९९९९ और २७८६५८५४८६ ।

(८) ८०७१०२ को ५७२०० से, ३७१८००० को ४५६०० से और ३५४३७९९ को २९०८१३ से गुण के अलग २ गुणनफल कहो ।
उत्तर, ४६१६६२३४४००, १६९५४०८००००० और १०३०५७९९१०४५७ ।

(९) २६३५७५७७१ को १३ से, १८०३४१३१७ को १९ से, ४६९३८१५१ को ३७ से, १३८७२४०९ को २४७ से १११६११८९ को ३०७ से, ५५३५५१७ को ६१९ से, ३६१०६२७ को ६४९ से, २४७०४२९ को १३८७ से, ८५८५५३ को ३९९१ से, ५८७४३१ को

५८३३ से, ४२५८०९ को ८०४७ से, २९१३४३ को ११७६१ से, १९००३३ को १८०३१ से, १५२८९३ को २२४११ से और ७५८२९ को ४५१८७ से अलग २ गुण के गुणनफल कहो ।

उत्तर, ३४२६४८५०२३ ।

(१०) १३, २८ और ७४ इन तीन संख्याओं का गुणनफल कहो । अर्थात् इन तीनों में पहिले कोइ दो संख्याओं का गुणनफल बना के उस को तीसरी संख्या से गुण देओ और तब जो गुणनफल होगा सो कहो ।

उत्तर, २६९३६ ।

(११) १०३, ३७६ और ५८४ इन तीनों का और ७४, ८५, १३७ और २०८ इन चारों का अलग २ गुणनफल कहो ।

उत्तर, २२६१७१५२ और १७९२३९८४० ।

गुणनचक्र

६४८	२५६	४८६
३२४	४३२	५७६
३८४	७२९	२८८

यह गुणनचक्र बालकों को गुणन के अभ्यास के लिये लिखा है। इस में हर एक पंक्ति की तीन २ संख्याओं का गुणनफल ८०६२१५६८ इतना हि होता है। वह पंक्ति ऊर्ध्वाधर अर्थात् खड़ी हो वा तिर्यक् अर्थात् बेंड़ी हो वा कर्ण के आकार की अर्थात् तिरछी हो । इस प्रकार से इस में तीन २ संख्याओं के गुणन के आठ उदाहरण हैं ।

दूसरा बड़ा गुणनचक्र ।

१४७	७९२	९८	१३२
३०८	४२	४६२	२५२
३९६	२९४	२६४	४९
८४	१५४	१२६	९२४

इस बड़े गुणनचक्र में भी हर एक पंक्ति की संख्याओं का गुणनफल १५०६०६०८६४ इतना ही होता है फिर वह पंक्ति खडी वा बेंडी वा कर्णाकार हो और इस में यह विशेष है कि जिन में दो २ कोष्ठक खड़े और दो २ बेंड़े ऐसे हर एक चार कोष्ठकों की संख्याओं का भी गुणनफल १५०६०६०८६४ इतना ही होता है । इस प्रकार से इस चक्र में चार २ संख्याओं के गुणन के उदाहरण १९ हैं ।

गुणन के प्रश्न ।

(१) एक पैसे को ५ आंब मिलते हैं तो १३ पैसे को कितने आवें गे ?

उत्तर, ६५ आंब ।

(२) एक रुपये की ७ सेर चीनी बिकती है तो कहो ३९ रुपयों की कितनी आवेगी ?

उत्तर, २७३ सेर ।

(३) एक रुपया के १७ सेर चांवल और एक हि रुपया के २३ सेर गोहूं आते हैं तो ४५ रुपयों के कितने सेर चांवल और ३४ रुपयों के कितने सेर गोहूं आवेंगे ? सो कहो ।

उत्तर, ७६५ सेर चांवल और ७८२ सेर गोहूं ।

(४) एक मनुष्य ने पैसे के २७ के भाव से ८३ पैसे के फल मोल लिये फिर उस ने दूसरे दिन पैसे के २९ के भाव से ७६ पैसे के वेही फल मोल लिये। तब दोनों दिन में मिल के उस ने कितने फल मोल लिये?

उत्तर, ४४४५ ।

(५) एक दाता के द्वार पर याचकों का समूह खड़ा था। उस समूह में ३०७ पुरुष, २८६ स्त्री और ३१५ लड़के थे। उस दाता ने हर एक पुरुष को १७ पैसे, स्त्री को १३ और लड़के को ५ इस नियम से सब को धन बांट दिया। तब कहो उस ने उस दिन कितने पैसे बांट दिये?

उत्तर, १०५५१ पैसे ।

(६) दूसरे दिन उसी दाता के द्वार पर २७६ पुरुष, २४५ स्त्री, और ३४७ लड़के भीख मांगने के लिये खड़े रहे। उस दिन उसने हर एक पुरुष को २३ पैसे, स्त्री को १६ और लड़के को ४ इस नियम से पैसे बांट दिये। तब उस ने पहिले दिन से दूसरे दिन कितने पैसे अधिक दान किये?

उत्तर, दूसरे दिन ११०५ पैसे अधिक धर्म किया ।

(७) किसी बनिये ने रुपये के २३ सेर के भाव से ९७ रुपयों के चांवल मोल लिये फिर कुछ दिन पीछे उस ने उन में से रुपये के १७ सेर के भाव से इतने रुपयों के चांवल वेंच डाले कि जिस से उस को २५ रुपये अधिक लाभ हुआ तो बताओ उस के पास कितने चांवल बच रहे?

उत्तर, १५७ सेर ।

(८) एक मनुष्य के तीन गांव में क्रम से २५८, ३७४ और १९६ आंब के वृक्ष थे। उस ने एक दिन पहिले गांव के हर एक वृक्ष से ८५७ आंब, दूसरे गांव के हर एक वृक्ष से ९३८ और तीसरे गांव के हर एक वृक्ष से ४९७ आंब उतरवाये। तो उस मनुष्य ने उस दिन तीनों गांव के मिल के कितने आंब तोड़वाये?

उत्तर, ६६३४५० ।

(९) एक पण्डित के पास एक पुस्तक था। उस समय पुस्तक के १३९६ पृष्ठ थे। हर एक उस पृष्ठ में २९ पंक्ति और हर एक पंक्ति में ३८ अक्षर थे। तब कहो उस संपूर्ण पुस्तक में कितने अक्षर होंगे।

उत्तर, १५३८३९२ ।

(१०) किसी धनिक के घर में ४ कोठरियों में बहुत धन रक्खा था। उन में पहिली कोठरी में ३५ कुण्ड थे। उस हर एक कुण्ड में १६ धातु के पात्र और एक २ पात्र में ९८७ रुपये थे। दूसरी कोठरी में ३९ कुण्ड थे। हर एक कुण्ड में १८ पात्र और एक २ पात्र में ८५६ रुपये थे। तीसरी कोठरी में २८ कुण्ड, एक २ कुण्ड में २५ पात्र और एक २ पात्र में १०६७ रुपये थे और चौथी कोठरी में ३२ कुण्ड, हर एक कुण्ड में २७ पात्र और हर एक पात्र में १२४८ रुपये थे। तब कहो हर एक कोठरी में कितने २ रुपये थे और सब मिल के उस का धन कितना था?

उत्तर, पहिली कोठरी में ५५२७२० रुपये, दूसरी में ६००९१२,
तीसरी में ७४६९०० और चौथी में १०७८२७२ रुपये।
और सब धन मिल के २९७८८०४ रुपये थे।

५ भागहार ।

५६ । दो संख्याओं में पहिली संख्या के जो उतने समान विभाग करने हों जितनी दूसरी संख्या है तो उन में एक विभाग की संख्या को भजनफल वा लब्धि कहते हैं और पहिली संख्या को भाज्य और दूसरी को भाजक कहते हैं । और उस भजनफल वा लब्धि के जानने के प्रकार को भागहार वा भजन कहते हैं ।

जैसा । ५६ और ८ ये दो संख्या हैं । इन में जो ५६ के आठ समान विभाग करने हों तो स्पष्ट है कि हर एक विभाग की संख्या ७ होगी । इस लिये यहां ५६ भाज्य, ८ भाजक और ७ भजनफल वा लब्धि है । यहां ५६ में ८ का भाग देने से लब्धि ७ आती है यों बोलते हैं । इसी प्रकार से और संख्याओं में भी जानो कि जिस में भाग देना है वह भाज्य, जिस का भाग देना है वह भाजक और जो फल आवेगा सो लब्धि है ।

५७ । ऊपर के प्रक्रम में जो लब्धि का लक्षण लिखा है उस से स्पष्ट है कि जितनी भाजक की संख्या होगी उतने स्थान में लब्धि को लिख के उन सब लब्धिओं का योग करो सो भाज्य के समान होगा । इस लिये (४२) वे प्रक्रम से सिद्ध होता है कि भाजक और लब्धि का गुणनफल भाज्य के तुल्य है और (४३) वे प्रक्रम से यह भी सिद्ध होता है कि इस में गुण्य के स्थान में लब्धि, गुणक के स्थान में भाजक और गुणनफल के स्थान में भाज्य है । परंतु (४४) वे प्रक्रम के पहिले सिद्धान्त के अनुसार लब्धि और भाजक इन दोनों में चाहो जिसको गुण्य और दूसरे को गुणक मानो तो भी गुणनफल भाज्य के समान होगा । इस लिये यह भी अर्थ सिद्ध है कि गुण्य के स्थान में भाजक, गुणक के स्थान में लब्धि और गुणनफल के स्थान में भाज्य है ।

५८ । जब कि भाजक और लब्धि ये क्रम से गुण्य और गुणक हो सकते हैं तब (४२) वे प्रक्रम के अनुसार यह सिद्ध होता है कि लब्धि की जितनी संख्या होगी उतनी बार भाजक को लेने से फल भाज्य के तुल्य होगा । इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि उलटी क्रिया से अर्थात् भाज्य में भाजक को बार २ घटाने से जितनी बार में भाज्य निःशेष होगा वह वारसंख्या लब्धि है, यह लब्धि जानने का एक सुगम उपाय है ।

जैसा ।

५६
८
४८
८
४०
८
३२
८
२४
८
१६
८
८
८
०

जब ५६ में ८ का भाग देना है तब ५६ में पहिले ८ घटाने से ४८ बचता है फिर इस में ८ घटाने से ४० बचता है इस प्रकार से ७ बार ८ को घटा देने से भाज्य निःशेष होता है। इस लिये यहां वारसंख्या जो ७ है वही लब्धि है। इस से यह स्पष्ट है कि भागहार भी एक वा अनेक बार व्यवकलन करने से बनता है।

और जब कि भाजक और लब्धि का गुणनफल भाज्य है तब भाज्य में भाजक का भाग देने से क्या लब्धि होगी? इस प्रश्न का यही अर्थ होगा कि भाजक को किस संख्या से गुण देने से गुणनफल भाज्य के तुल्य होगा? वही संख्या लब्धि होगी। इस से स्पष्ट है कि गुणन का विलोम विधि भागहार है।

५९। इस प्रक्रम में भागहार के कुछ सिद्धान्त लिखते हैं।

(१) पहिला सिद्धान्त। भाज्य के चाहो उतने विभाग करो और हर एक विभाग में भाजक का भाग देने से जो अलग २ लब्धि आवेंगी उन का योग करो वह योग उन भाज्यभाज्यकों की लब्धि होगी।

जैसा। ५६ भाज्य और ८ भाजक है। इन में ५६ के ३२ और २४ ये दो विभाग हैं। इन दोनों में ८ का भाग देने से क्रम से ४ और ३ लब्धि आती है। इन लब्धिओं का योग ७ वह पूरी लब्धि है।

क्यों कि ४ और ३ इन अलग २ लब्धिओं को ८ भाजक से गुण देने से जो ३२ और २४ ये गुणनफल अवश्य भाज्य के विभाग होंगे उन का योग भाज्य ५६ वही होगा जो ४ और ३ इन के योग ७ को ८ भाजक से गुण देने से गुणनफल होगा (यह ४४ वे प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त से स्पष्ट है) परंतु ८ भाजक से जिस ७ संख्या को गुण देने से गुणनफल भाज्य के तुल्य होगा वही पूरी लब्धि है। इस लिये ४ और ३ इन अलग २ लब्धिओं का योग ७ पूरी लब्धि है, इस से इस सिद्धान्त की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

अनुमान। जो भाज्य के लिये ऐसे दो राशि कल्पना करो जिन का अन्तर उस भाज्य के तुल्य हो, तो हर एक राशि में भाजक का भाग देने से जो लब्धि आवेंगी उनका अन्तर करो वह उन भाज्यभाजकों की लब्धि होगी।

इस अनुमान की युक्ति (४४) वे प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त के अनुमान को और ऊपर दिखलाई हुई युक्ति को विचारने से तुरंत मन में आवेगी ।

(२) दूसरा सिद्धान्त । भाज्यभाजकों में जो भाजक के ऐसे दो खण्ड कल्पना करो कि जिन का गुणनफल उस भाजक के तुल्य हो तो भाज्य में पहिले एक खण्ड का भाग देने से जो लब्धि आवेगी उसी में दूसरे खण्ड का भाग देओ जो दूसरी लब्धि आवेगी वह उन भाज्य-भाजकों की लब्धि के समान होगी ।

जैसा । ५६ और ८ ये क्रम से भाज्य और भाजक हैं। इन में ८ भाजक के गुण्य-गुणकरूप खण्ड २ और ४ हैं। अब ५६ भाज्य में पहिले २ का भाग देने से २८ लब्धि आती है फिर २८ में ४ का भाग देने से दूसरी लब्धि ७ आती है। यही ५६ में ८ का भाग देने से लब्धि होती है। अथवा ५६ में पहिले ४ का भाग देने से १४ लब्धि आती है फिर १४ में २ का भाग देने से ७ वही लब्धि आती है ।

इसी क युक्ति (४४) वे प्रक्रम के तीसरे सिद्धान्त से स्पष्ट है।

अनुमान । (४४) वे प्रक्रम के तीसरे सिद्धान्त के पहिले और दूसरे अनुमान से यह तुरंत सिद्ध होता है कि जो भाजक के दो से अधिक भी ऐसे खण्ड कल्पना करो कि जिन का गुणनफल उस भाजक के तुल्य हो और उन सब खण्डों का भाज्य में क्रम से भाग देओ तो अन्त में वही लब्धि होगी जो उन भाज्यभाजकों की लब्धि है। और उन खण्डों का भाग देने में उन का क्रम चाहो तैसा रक्खो ।

(३) तीसरा सिद्धान्त । भाज्य और भाजक इन दोनों में जो भाज्य हि केवल शून्य हो तो लब्धि शून्य होगी और जो भाजक हि केवल शून्य हो तो लब्धि का मान अनन्त होगा अर्थात् इतना बड़ा होगा कि जिस का अन्त नहीं ।

इस की युक्ति यह है ।

जब कि भाजक और लब्धि का गुणनफल भाज्य के समान होता है। तब जो भाज्य शून्य हो तो लब्धि अवश्य शून्य होगी क्यों कि शून्य हि से भाजक को गुणं देने से गुणनफल भाज्य के समान शून्य होगा ।

और जब कि भाज्य में भाजक को वार २ घटाने से जितनी वार में भाज्य निःशेष होगा वही वारसंख्या लब्धि है (५८ वां प्रक्रम देखो) तब जो भाजक शून्य हो तो उस को भाज्य में चाहो उतनी वार घटाओ तो भी भाज्य निःशेष न होगा इस से स्पष्ट है कि यहां घटाने की वारसंख्या का कभी अन्त न होगा। इस लिये यहां लब्धि की संख्या अनन्त है। इस अनन्त संख्या को संस्कृत में खहर कहते हैं। भास्कराचार्य ने लिखा है कि 'अयमनन्तो राशिः खहर इत्युच्यते' ।

(४) चौथा सिद्धान्त । जो भाज्य और भाजक दोनों शून्य हों तो जो चाहो सो संख्या लब्धि हो सकती है ।

इस का कारण अति स्पष्ट है । क्यों कि जिस संख्या का और भाजक का गुणनफल भाज्य के तुल्य हो वही संख्या लब्धि है और जब भाज्य और भाजक ये दोनो शून्य हैं तो लब्धि अवश्य चाहो सो संख्या हो सकती है क्योंकि चाहो तिस संख्या से शून्य भाजक को गुण देओ तो गुणनफल अवश्य शून्य अर्थात् भाज्य के समान होगा ।

(५) पांचवां सिद्धान्त । भाज्य और भाजक में जो भाजक १ हो तो लब्धि भाज्य के समान होगी ।

क्यों कि जब भाजक को भाज्य ही से गुण देओ तो गुणनफल भाज्य के समान होगा ।

(६) छठवां सिद्धान्त । भाज्य और भाजक में जो भाजक १०, १००, १००० इत्यादि हो और भाज्य पर क्रम से एक, दो, तीन इत्यादि शून्य हों तो भाजक में एक के ऊपर जितने शून्य होंगे उतने भाज्य के ऊपर के शून्यों को छेंक देने से जो भाज्य बचेगा सो हि लब्धि होगी ।

इस की युक्ति (४४) वे प्रक्रम के पांचवें सिद्धान्त से स्पष्ट होती है ।

(७) सातवां सिद्धान्त । भाज्य और भाजक इन दोनों को किसी एक हि अङ्क से गुण देओ वा दोनों में किसी एक हि अङ्क का भाग देओ तो जो नये भाज्य और भाजक बनेंगे उन की भी लब्धि वही होगी जो पहिले भाज्य भाजकों की है ।

इस की युक्ति ।

जो इष्ट अङ्क से भाजक को गुण देओ और उस फल को फिर लब्धि से गुण देओ तो गुणनफल वही होगा जो भाजक और लब्धि के गुणनफल को उसी इष्ट अङ्क से गुण देने से फल होगा (यह (४४) वे प्रक्रम के तीसरे सिद्धान्त के दूसरे अनुमान से स्पष्ट है) परंतु भाजक और लब्धि का गुणनफल भाज्य के तुल्य है इस लिये भाज्य और इष्ट अङ्क के गुणनफल के तुल्य वह फल होगा । इस से स्पष्ट है कि जो इष्ट अङ्क से गुणे हुए भाजक को नया भाजक और उसी अङ्क से गुणे हुए भाज्य को नया भाज्य मानो तो लब्धि वही होगी जो पहिली है । इसी के उलटी इष्ट अङ्क के भाग देने में युक्ति है ।

६० । ऊपर (५८) वें प्रक्रम में जो लब्धि जानने का उपाय दिखलाया है उस से ५६ भाज्य और ८ भाजक ऐसे उदाहरण में भाजक को भाज्य में बार २ घटाने से अन्त में भाज्य निःशेष होता है । इस लिये इस में जो ७ वारसंख्या है वह ठीक लब्धि है । परंतु जो भाज्य ६१ और भाजक ८ हो तो यहां ६१ में ८ को ७ वार घटाने से अन्त में ५

शेष बचता है और फिर ५ में ८ नहीं घट सकते इस लिये यहां ठीक लब्धि क्या होगी? इस प्रश्न के उत्तर के लिये कहते हैं ।

यहां भाज्य के दो विभाग कल्पना करो उन में एक वह जो भाजक से निःशेष होता है और दूसरा वह जो भाजक से छोटा अन्त में शेष बचता है । जैसा।६१ भाज्य और ८ भाजक में ६१ के ५६ और ५ ये दो विभाग हैं तब पहिले ५६ इस विभाग में ८ का भाग देने से लब्धि ठीक ७ आती है और दूसरे ५ इस विभाग में ८ का भाग दे के लब्धि चाहो, तो ५ इस संख्या के समान ८ भाग करो उन में एक भाग का जो मान होगा सो हि (५६) वे प्रक्रम के अनुसार लब्धि का मान है । परंतु ५ का ८ वां भाग अवश्य १ से छोटा है और वह कोइ पूरी संख्या नहीं है अर्थात् भिन्न है इस लिये इस लब्धि का मान केवल भिन्न संख्या के रूप में लिख के दिखलाते हैं । सो ऐसा $\frac{5}{8}$ अर्थात् शेष के नीचे एक बेंड़ी रेखा खींच के उस के नीचे भाजक को लिखते हैं । इस प्रकार से ६१ भाज्य के ५६ और ५ इन दो विभागों में ८ का भाग देने से ७ और $\frac{5}{8}$ ये दो अलग २ लब्धि होती हैं । इन लब्धिओं का योग (५९) वे प्रक्रम के पहिले सिद्धान्त के अनुसार ६१ भाज्य और ८ भाजक की ठीक लब्धि है । इस ठीक लब्धि को ७$\frac{5}{8}$ यों लिखते हैं और इस के मान को ७ पूर्णाङ्क ५ का ८ वां अंश यों बोलते हैं । इसी प्रकार से और भाज्य भाजकों में भी जानो ।

६१ । अनुमान । भाज्य में भाजक का भाग देने से जो कुछ शेष बचता हो तो भाजक और अभिन्न लब्धि इन के गुणनफल में शेष जोड़ देओ वह योग भाज्य के तुल्य होगा । और जो उस शेष को भाज्य में घटा देओ तो अन्तर भाजक से निःशेष होगा । अर्थात् उस अन्तर में भाजक का भाग देने से अन्त में शेष कुछ न रहेगा ।

६२ । पहिले (५८) वें प्रक्रम में लिखा है कि भाज्य में भाजक को बार २ घटाने से जितनी बार में भाज्य निःशेष होगा वह वारसंख्या लब्धि है । परंतु इस प्रकार से लब्धि के जानने में बड़ा गौरव और क्लेश होता है इस लिये उसी प्रक्रम के अन्त में लिखा है कि गुणन का विलोम विधि भागहार है उस के अनुसार अब गुण्यगुणकों से गुणन-

फल जानने की जो क्रिया है उस की उलटी रीति से लब्धि के खोजने का प्रकार लिखते हैं ।

जैसा ।	गुण्य	५३७८
	गुणक	४५६२
		१०७५६
		४८४०२
		२६८९०
		२१५१२
	गुणनफल	२४९९५७७६

यहां गुणनफल और गुण्य ये दो मानो क्रम से भाज्य और भाजक हैं। इन पर से गुणक के अङ्कों को जानना चाहिये वे ही अवश्य लब्धि के अङ्क होंगे। अब बांई ओर जो गुणन करके दिखलाया है इस में देखते हैं कि गुणक और गुणनफल इन के बीच में जो चार खण्ड गुणनफल लिखे हैं वे गुणक के हर एक अङ्क से गुण्य को गुण देने से बने हैं और उन में जो सब के नीचे खण्ड गुणनफल है सो गुणक के बांए भाग के अन्त के अङ्क का और गुण्य का गुणनफल है और जो अन्त के खण्ड गुणनफल के ऊपर का खण्ड गुणनफल एक स्थान बढ़ के है सो गुणक के बांए भाग के दूसरे अङ्क का और गुण्य का गुणनफल है और इसी प्रकार से और भी खण्ड गुणनफल एक के ऊपर एक दहिनी ओर एक २ स्थान बढ़ के हैं और उन सब एक २ स्थान आगे बढ़ा के स्थापित किये हुए खण्ड गुणनफलों का योग भाज्य है। अब इस योगरूप भाज्य को देखने से तुरंत मन में आवेगा कि भाज्य के बांए भाग के जितने अङ्कों की संख्या गुण्य से अर्थात् भाजक से बड़ी होगी वह अवश्य सब के नीचे जो खण्ड गुणनफल है उस के लगभग होगी जैसा यहां भाज्य के बांए भाग की संख्या २४९९५ यह ५३७८ इस भाजक से बड़ी है सो २१५१२ इस नीचे के खण्ड गुणनफल के लगभग है। इस लिये ५३७८ इस भाजक की संख्या को किस अङ्क से गुण देने से गुणनफल, भाज्य के बांए भाग की २४९९५ इस संख्या से छोटा और इस के लगभग हो उस को पहाड़ों की सहायता से खोज सकते हैं। सो जैसा यहां खोजने से जानोगे कि यहां वह अङ्क ४ है। तब इस से भाजक को गुण देने से जो गुणनफल भाज्य के बांए भाग की संख्या से २४९९५ छोटा हो तब निश्चय है कि ४ यही अङ्क लब्धि के बांए भाग का अन्त का अङ्क है। इस से भाजक को गुण देओ तो गुणनफल २१५१२ यही सब के नीचे का खण्ड गुणनफल है। अब जो इस को २१५१२ भाज्य के बांए भाग की संख्या में घटा देओ तो शेष ३४८३ यह बचता है। इस के दहिने भाग में जो भाज्य के बचे हुए ७७६ अङ्कों को लिख देओ तो ३४८३७७६ यह अवश्य एक २ स्थान आगे बढा के स्थापित किये हुए उन खण्ड गुणनफलों का योग होगा जो नीचे के खण्ड गुणनफल के ऊपर हैं। अब ३४८३७७६ इसी को भाज्य मानो और नीचे के खण्ड गुणनफल के ऊपर जो खण्ड गुणनफल है सो एक स्थान आगे बढ़ के है इस लिये ३४८३ इस शेष के दहिने भाग में उस के आगे का भाज्य का एक हि अङ्क लिख देओ और इसी को इस भाज्य के बांए भाग की संख्या मानो तब ऊपर जिस प्रकार से लब्धि के बांए भाग का अन्त का अङ्क खोजा उसी प्रकार से उस के पास का अङ्क खोज लेओ। और इसी प्रकार से आगे भी खोजने से लब्धि के सब अङ्क बूझ पड़ेंगे। इसी खोज के प्रकार के आश्रय से यह आगे की भागहार की रीति उत्पन्न होती है।

६३ । भागहार की सामान्य रीति ।

(१) पहिले भाज्य की संख्या लिख के उस की बांई ओर) ऐसी एक

टेढी रेखा खींच के उस की बांई ओर भाजक की संख्या लिखो और भाज्य की दहिनी ओर (ऐसी एक टेढी रेखा करो । इस की दहिनी ओर लब्धि लिखते हैं ।

(२) भाज्य के बांए भाग की जो संख्या भाजक से छोटी न हो परंतु भाजक के लगभग वा समान हो उस संख्या को अन्त्यभाज्य मानो ।

(३) एक से ले के १० तक वा १० से भी अधिक जिस संख्या तक के पहाड़े कण्ठ हों उस संख्या से छोटी भाजक के बांए भाग में एक वा दो अङ्कों की जो संख्या हो उस को अन्त्यभाजक मानो और भाजक में अन्त्यभाजक के दहिनी ओर जितने अङ्क होंगे उतने अन्त्यभाज्य के दहिने भाग के अङ्क छोड़ देने से जो उस के बांए भाग में संख्या बचे उस को अन्त्यभाज्य का अन्तिम खण्ड कहो ।

(४) अन्त्यभाजक के पहाड़े की सहायता से देखो कि किस अङ्क से अन्त्यभाजक को गुण देने से गुणनफल अन्त्यभाज्य के अन्तिम खण्ड के समान वा उस से थोड़ा छोटा हो उस अङ्क को ऊपर की (इस रेखा की दहिनी ओर लिखो वह लब्धि का पहिला अङ्क है ।

(५) उस अङ्क से समग्र भाजक को गुण के गुणनफल को अन्त्यभाज्य में घटा देओ । जो कदाचित् यह गुणनफल अन्त्यभाज्य से बड़ा हो तो उस अङ्क में १ वा २ घटा के ऐसा एक अङ्क मानो कि जिस करके भाजक को गुण देने से गुणनफल अन्त्यभाज्य के समान वा उस से छोटा हो और इस गुणनफल को अन्त्यभाज्य में घटा देने से शेष, भाजक से छोटा रहे । तब इसी अङ्क को लब्धि का पहिला अङ्क समझो । और शेष की दहिनी ओर भाज्य का अन्त्यभाज्य के पास का एक अङ्क लिखो, उस एक अङ्क से बढ़ाए हुए शेष को नया अन्त्यभाज्य मानो और अन्त्यभाजक सदा उसी को मानो जिस को पहिले माने हो ।

(६) पहिला अन्त्यभाज्य और अन्त्यभाजक इन दोनों के द्वारा जैसा लब्धि का एक अङ्क जान लिया उसी प्रकार से यह नया अन्त्यभाज्य और पहिला हि अन्त्यभाजक इन दोनों से लब्धि का और एक अङ्क जान लेओ । इस को लब्धि के पहिले अङ्क के दहिने भाग में लिखो । यह लब्धि का दूसरा अङ्क है ।

(७) आगे इस अङ्क से भी वैसी हि क्रिया करो जैसी पहिले अङ्क से किई है और ऐसी क्रिया वार २ तब तक करो जब तक शेष की दहिनी ओर रखने के लिये भाज्य में कोइ अङ्क शेष न रहे ।

(८) इस में जहां भाजक से कोइ अन्त्यभाज्य छोटा हो वहां उस अन्त्यभाज्य पर भाज्य का पहिले अङ्क के पास का और एक अङ्क लिखो और उस को अन्त्यभाज्य मानो और लब्धि के स्थान में जो अङ्क होंगे उन की दहिनी ओर एक शून्य लिख देओ (यहां संस्कृत में 'भागाभावे लब्धं शून्यम्' यों बोलते हैं) फिर ऊपर जो क्रिया लिखी है उसी के अनुसार आगे सब क्रिया करो ।

(९) इस प्रकार से भाज्य में भाजक का भाग देने से अन्त में जो शेष कुछ न रहे तो लब्धि के स्थान में जो संख्या आई होगी वही पूरी लब्धि है । और जो कुछ शेष रहे तो लब्धि के आगे — यों एक रेखा खींच के उस के ऊपर शेष और नीचे भाजक लिख देओ ।

उदा० (१) ३७०८६९१ इस संख्या में ७ का भाग देओ और ८३५९१५२६ इस में १३ का भाग देओ

```
७) ३७०८६९१ (५२९८१३          १३) ८३५९१५२६ (६४३०११७ ५/१३
   ३५                              ७८
   ---                             ---
   ·२०                              ५५
    १४                              ५२
   ---                             ---
   ·६८                               ३९
    ६३                               ३९
   ---                             ---
    ·५६                             ··१५
     ५६                                १३
    ---                               ---
    ··९                                 २२
       ७                                १३
      ---                              ---
       २१                                ९६
       २१                                ९१
      ---                              ---
       ··                                 ५ यह शेष है ।
```

जो भाजक की संख्या इतनी छोटी हो कि जिस का पहाड़ा कण्ठ हो तो ऊपर के उदाहरण में भागहार की जितनी क्रिया फैला के दिखलाई है उस की अपेक्षा बहुत सुलभ क्रिया से लब्धि को जान सकते हो सो इस प्रकार से कि भाज्य के नीचे एक रेखा खींच के भाजक के पहाड़े की सहायता से गुणनफल और अन्तर सब मनहीं

में कर के लब्धि के अङ्कों को तुरंत उस रेखा के नीचे लिख देओ। इस सुलभ क्रिया को ह्रस्व भागहार कहते हैं और पहिली को दीर्घ भागहार कहते हैं।

जैसा। ७) ३७०८६९१ और १३) ८३५९१५२६
५२९८१३ ६४३०११७$\frac{५}{१३}$

उदा० (२) ८७९४३५ इस में ५६ का भाग देओ।

५६) ८७९४३५ (१५७०४$\frac{११}{५६}$
५६
३१९
२८०
३९४
३९२
२३५
२२४
११ शेष

यहां जब कि ५६ यह भाजक ७ और ८ का गुणनफल है तब (५९) वें प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त से स्पष्ट है कि जो भाज्य में क्रम से ७ का और ८ का भाग देओ तोभी लब्धि ठीक आवेगी।

जैसा। ७) ८७९४३५
८) १२५६३३ और ४ पहिला शेष
१५७०४ और १ दूसरा शेष।

यहां लब्धि तो ठीक मिल गई परंतु शेष के लिये यह सोचना चाहिये कि जब कि यहां दूसरे भाज्य से पहिला भाज्य ७ गुना है तो अवश्य दूसरे शेष को ७ से गुण देओ सो फल ७ भाज्य का जाति का होगा और जो पहिला शेष ४ है सो भाज्य के जाति के ४ हैं इसलिये ७ और ४ इन का योग ११ यह वास्तव शेष होगा। इस से वास्तव शेष जानने की यह रीति उत्पन्न होती है।

रीति। जब भाजक के गुण्यगुणकरूप दो खण्डों का भाज्य में भाग दिया हो तब उस में पहिला खण्ड और दूसरा शेष इन दोनों के गुणनफल में पहिला शेष जोड़ देओ सो वास्तव शेष होगा।

जैसा। इसी उदाहरण में पहिले ८ का फिर ७ का भाग देने से

८) ८७९४३५
७) १०९९२९ और ३ पहिला शेष
१५७०४ और १ दूसरा शेष

यहां भाजक का पहिला खण्ड ८ और दूसरा शेष १ इन के गुणनफल में ८ पहिला शेष ३ जोड़ दिया ११ यही वास्तव शेष है।

उदा० (३) ७१९८३७२६ इस में ५१२०० इस का भाग देओ ।

```
५१२००) ७१९८३७२६ (१४०५ ४७७२६/५१२००
       ५१२००
       ------
       २०७८३७
       २०४८००
       -------
         ३०३७२६
         २५६०००
         -------
          ४७७२६ शेष
```

इस में भाजक के ऊपर के दो शून्य और उतने ही भाज्य के ऊपर के २६ ये दो अङ्क इन को अलगाने से जो ५१२ और ७१९८३७ ये नये भाज्य और भाजक बचते हैं इन की यहां भागहार की सामान्य रीति से लब्धि ले आते हैं ।

```
जैसा ।  ५१२) ७१९८३७ (१४०५
            ५१२
            ----
            २०७८
            २०४८
            ----
              ३०३७
              २५६०
              ----
              ४७७२६ शेष
```

इस में भी वही लब्धि आती है जो पहिले आई है केवल इतना ही विशेष है कि भाज्य के जो २६ ये दो अङ्क अलग किये हैं इन को शेष की दहनी ओर लिख देने से वास्तव शेष होता है। इस से यह रीति निकलती है।

रीति। जो भाजक के दहने भाग में कुछ शून्य हों तो जितने शून्य होंगे उतने भाज्य के दहने भाग के अङ्कों को भाज्य से अलग करो और उस नये भाज्य में उस शून्य रहित नये भाजक का भाग देओ जो लब्धि आवेगी सो वास्तव होगी और भाज्य के अलगाये हुए अङ्कों को शेष के दहने भाग में लिख देओ सो वास्तव शेष होगा ।

उदा० (४) ६०७६१३५ इस में ८३७ इस का भाग देओ ।

```
८३७) ६०७६१३५ (७२५९ ३५२/८३७
     ५८५९
     ----
     २१७१
     १६७४
     ----
      ४९७३
      ४१८५
      ----
       ७८८५
       ७५३३
       ----
        ३५२ शेष
```

६४ । भागहार में लब्धि की प्रतीति करने के अनेक प्रकार हैं ।

(१) भाज्य में लब्धि का भाग देओ । जो इस में भाजक के समान लब्धि आवे और शेष वही रहे जो पहिला है तो जानो कि लब्धि और शेष दोनों शुद्ध हैं ।

(२) भाजक से लब्धि को गुण के गुणनफल में शेष जोड़ देओ । जो योग भाज्य के तुल्य हो तो लब्धि और शेष दोनों ठीक हैं ।

(३) भागहार की क्रिया के न्यास में लब्धि के अङ्कों के और भागहार के जो अलग २ गुणनफल एक २ स्थान आगे बढ़ के लिखे रहते हैं वैसे ही लिखे हुए गुणनफल और शेष इन का योग करो । जो वह भाज्य के समान हो तो जानो कि लब्धि और शेष ये दोनों शुद्ध हैं ।

जैसा । ऊपर के चौथे उदाहरण में लब्धि के अङ्कों के और भाजक के गुणनफल और शेष ये यहां अपने २ स्थान में लिखे हैं । इन सभों का योग यहां भाज्य के समान है । इस लिये इस में लब्धि और शेष ये दोनों शुद्ध हैं ।

```
५८५९
 १६७४
  ४१८५
   ७५३३
    ३५२ शेष
६०७६१३५ योग
```

(४) इस के और दो प्रकार आगे (८६) वे प्रक्रम में देखो ।

६५ । पहिले (५५) वे प्रक्रम में दिखलाया है कि जो गुण्य और गुणक ये दोनों केवल संख्यात्मक हों तो गुणनफल संख्यात्मक होगा और जो उन में गुण्य संख्येय हो तो गुणनफल भी उसी की जाति का होगा । इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि जब भाज्य संख्यात्मक है तब भाजक अवश्य संख्यात्मक हि चाहिये और उस में लब्धि भी संख्यात्मक होगी । परंतु जब भाज्य संख्येय होगा तब जो भाजक भी उसी की जाति का हो तो लब्धि केवल संख्यात्मक होगी और जो भाजक संख्यात्मक हो तो लब्धि भाज्य की जाति की होगी ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) ६३८ ÷ २ = ३१९ ।
(२) ८३०५४ ÷ २ = ४१५२७ ।

(३) ३९४०५७२०१ ÷ २ = १९७०२८६०० $\frac{१}{२}$ ।

(४) ७३२६ ÷ ३ = २४४२ ।

(५) १४२९०५ ÷ ३ = ४७६३५ ।

(६) ९८५३००२ ÷ ३ = ३२८४३३४ ।

(७) २०८६४९०००१ ÷ ३ = ६९५४९६६६७ ।

(८) २७९२ ÷ ४ = ६९८ ।

(९) १९२५०३१७ ÷ ४ = ४८१२५७९ $\frac{१}{४}$ ।

(१०) ४६३७९२१५२ ÷ ४ = ११५९४८०३८ ।

(११) ३७२२८५ ÷ ५ = ७४४५७ ।

(१२) २१७३०८४९३० ÷ ५ = ४३४६१६९८६ ।

(१३) ७६८२२८ ÷ ६ = १२८०३८ ।

(१४) ८०९४३२१७२ ÷ ६ = १३४९०५३६२ ।

(१५) ३१८७४५ ÷ ७ = ४५५३५ ।

(१६) ५२९३६७१ ÷ ७ = ७५६२३८ $\frac{५}{७}$ ।

(१७) २९१४३५७०४ ÷ ७ = ४१६३३६७२ ।

(१८) ७३०५६० ÷ ८ = ९१३२० ।

(१९) ५९४१८३३६ ÷ ८ = ७४२७२९२ ।

(२०) ३५९१२७०० ÷ ९ = ३९९०३०० ।

(२१) ४८३२४७५३ ÷ ९ = ५३६९४१७ ।

(२२) ६९५७५ ÷ ११ = ६३२५ ।

(२३) ३२९०४६३७ ÷ १२ = २७४२०५३ $\frac{१}{१२}$ ।

(२४) ४९९१७२५७ ÷ १३ = ३८३९७८९ ।

(२५) ५८००२५३२ ÷ १४ = ४१४३०३८ ।

(२६) ३९८३५४२० ÷ १७ = २३४३२६० ।

(२७) ६१२५०९३२ ÷ १९ = ३२२३७३३ $\frac{५}{१९}$ ।

(२८) १०७९५२३१७ ÷ २३ = ४६९३५७९ ।

(२९) ८११९२५७०८ ÷ २७ = ३००७१३२२ $\frac{१४}{२७}$ ।

(३०) ४३५७१४१८३ ÷ २९ = १५०२४६२७ ।

(३१) ६७९५०१८१८ ÷ ३७ = १८३६४९१४ ।

(३२) २५५९००३६५७ ÷ ३७ = ६९१६२२६१ ।

(३३) ११२२७३९४८ ÷ ४६ = २४४०७३८ ।

(३४) २०९९३२४२५ ÷ ५७ = ३६८३०२५ ।

(३५) ३९१२०७२४५ ÷ ६५ = ६०१८५७३ ।

(३६) ४५७०६१७६ ÷ ७२ = ६३४८०८ ।

(३७) ४९१९२३१२५ ÷ ८१ = ६०७३१२५ ।

(३८) ६०२९३८०२० ÷ ९५ = ६३४६७१६ ।

(३९) १९८५४२७८ ÷ १०७ = १८५५५४ ।

(४०) ३५०८३५०८ ÷ १३७ = २५६०८४ ।

(४१) ५७२८३७४ ÷ २५८ = २२२०३ ।

(४२). ३९१७३१५१९० ÷ ५३८ = ७२८१२५५ ।

(४३) २८१९१४०७१३ ÷ ८०७ = ३४९३३५९ ।

(४४) ९७३८९७३८ ÷ १३१४ = ७४११७ ।

(४५) १३५७६९५७५६ ÷ १३१४ = १०३३२५४ ।

(४६) २७१५३९१५१२ ÷ २४८६ = १०९२२७३ $\frac{८३४}{२४८६}$ ।

(४७) ९५९८६४१५६८१८ ÷ ३७१२७ = २५८५३५३४ ।

(४८) ८८८८८८८८८ ÷ १५२२०७ = ५८४ ।

(४९) १३५७९०००१३५७९ ÷ १७२९ = ७८५३६७२६५१ ।

(५०) ७७७७७७७००७७७७७७७ ÷ २७१७ = २८६२९३४१५८१८१ ।

(५१) ३५०९८१७१५२४४५ ÷ ५७९९००० = ६०५२४५ $\frac{१३९७४४५}{५७९९०००}$ ।

(५२) २१८२७०४२५३०० ÷ ३७२९२०००० = ५८५ $\frac{११२२२५३००}{३७२९२००००}$ ।

(५३) ५५५५५४४४४४ ÷ २४३९ = २२७७७९६

(५४) १२३४५६७८९१२३४५६७८९ ÷ १७११७१ = ७२१२४८२७८७५९ ।

(५५) ६७२४१३०८५२९ ÷ ५८०१४२७ = ११५९० $\frac{२७६९५९९}{५८०१४२७}$ ।

(५६) ३२००६९१७२८३ ÷ ९८५००००७ = ३२४ $\frac{९२९१५०१५}{९८५००००७}$ ।

(५७) ४१९५२३०३८२७१५ ÷ ८९७३१२५९ = ४६७५३ $\frac{२४८३०६८८}{८९७३१२५९}$ ।

(५८) २४६७५३०८२४६७५३०८ ÷ ५८८२३५३ = ४२४५८०२३६ ।

भागहार के प्रश्न ।

(१) एक पैसे के ७ इस भाव से ५८१ आंब कितने पैसों को मोल मिलेंगे?

उ०, ८३ पैसे ।

(२) एक दाता के द्वार पर बहुत याचक खड़े थे उस ने हर एक को आठ २ पैसे देके अपना ७५२ पैसे धन बांट दिया । तब कहो सब याचक लोग कितने थे?

उत्तर, ९४ याचक थे ।

(३) एक मनुष्य ने अन्त समय में ७३४५८ रुपये धन अपने ९ लड़कों को समान बांट दिया । तो हर एक लड़के ने कितना २ धन पाया सो कहो?

उत्तर, ८१६२ रुपये ।

(४) एक गृहस्थ ने दो प्रकार के चांवल मोल लिये । उन में उत्तम चांवल एक

रुपये के १३ सेर के भाव से ४२९ सेर मोल लिये और मध्यम चांवल एक रुपये के १७ सेर के भाव से ११२९ सेर मोल लिये तब दोनों मिल के कितने रुपयों के चांवल उस ने मोल लिये सो कहो।

उत्तर, १०० रुपयों के।

(५) १९ मनुष्यों को मार्ग में ५७३ रुपयों की एक थैली मिली। उन्हों ने उतने रुपयों के समान १९ विभाग किये तब कुछ शेष रुपये बचे वे किसी दरिद्र को दे के एक २ समान विभाग हर एक ने ले लिया तब हर एक को कितने रुपये मिले सो कहो।

उत्तर, ३० रुपये।

(६) किसी कुंजड़े ने पैसे के ३ के भाव से ६० फल मोल लिये और उतने हि फल पैसे के ५ के भाव से और मोल लिये फिर २ पैसे के ८ अर्थात् पैसे के ४ इस भाव से सब फल बेंच डाले तब कहो उस को कितने पैसे लाभ वा घाटा हुआ।

उत्तर, २ पैसे घाटा हुआ।

(७) दो मनुष्यों ने मिल के ८५ हाथ लम्बा एक गड़हा खोदा उस में प्रतिदिन एक मनुष्य ३ हाथ लम्बा खोदता था और दूसरा २ हाथ। तब दोनों ने मिल के वह गड़हा कितने दिन में खोदा।

उत्तर, १७ दिन में।

(८) किसी बनिये ने रुपये की ६ सेर के भाव से ४१४ सेर चीनी मोल लिई उस में १४ सेर चीनी अपने घर में रख के और सब चीनी एक रुपये की ५ सेर के भाव से बेंच डाली तब उस को कितना लाभ वा घाटा हुआ सो कहो।

उत्तर, ११ रुपये लाभ हुआ

(९) एक लेखक नित्य ८५३ श्लोक लिखता था तब वह एक लाख श्लोक कितने दिन में लिखेगा ?

उत्तर, ११७२ $\frac{२८४}{८५३}$ दिन में।

(१०) किसी बनिये ने एक रुपये के १८ सेर के भाव से ४४६४ सेर चांवल मोल लिये। अब वह फुटकर एक रुपये के कितने सेर के भाव से वे चांवल बेंचे कि जिस में उस को ३१ रुपये लाभ हो ?

उत्तर, १६ सेर के भाव से।

(११) किसी दाता के द्वार पर कितने एक पुरुष, स्त्री और लड़के मिल के बहुत याचक खड़े थे उस दाता ने उन सभों को ५३२१ पैसे बांट दिये। उस में हर एक पुरुष को १२ पैसे इस नियम से सब पुरुषों को ३३०० पैसे, हर एक स्त्री को ८ पैसे इस नियम से सब स्त्रियों को १०९६ पैसे और हर एक लड़के को ५ पैसे इस नियम से सब लड़कों को बचे हुए पैसे बांट दिये। तब कहो उन याचकों में कितने पुरुष, स्त्री और लड़के थे ?

उत्तर, २७५ पुरुष, १३७ स्त्री, १८५ लड़के।

(१२) अ और क दो मित्र थे उन में अ अपना ४११६५ रुपये धन, और क अपना ५२११७ रुपये धन लेके आपस में द्यूत खेलने बैठे । पहिले अ अपने धन का ७ वां अंश हार गया तब क के पास जितना धन हुआ उस का ७ वां अंश फिर क हार गया । यों हर एक की हार जीत तीन वार हुई तब अन्त में एक २ के पास कितना २ धन हुआ सो कहो ।

उत्तर, अन्त में हर एक के पास ४६६५६ रुपये समान रहे ।

(१३) वह संख्या कौनसी है जिस को ६५६ संख्या से गुण देओ तो गुणनफल ७७७७७७७७ हो ?

उत्तर, ८११०३ ।

(१४) अ के पास १००१ रुपये और क के पास १०१५ रुपये थे । जो अ अपने रुपयों में से ८८६ रुपये क को देवे तो बताओ अ के धन से क का धन कितने गुना होगा । और जो क अपने रुपयों में से ८८६ रुपये अ को देवे तो क के धन से अ का धन कितने गुना होगा ?

उत्तर, १ । अ के धन से क का धन १७ गुना होगा ।
उत्तर, २ । क के धन से अ का धन १५ गुना होगा ।

अब नीचे के प्रक्रमों में गुणन और भागहार ये दोनों लाघव और शीघ्रता से सिद्ध होने के लिये कुछ विशेष लिखते हैं ।

६६ । पहाड़े निदान २० तक अवश्य कण्ठ करो और गुणन में जब गुण्य और गुणक २० से छोटे हों तो उन को न पढ के तुरंत गुणनफल को पढ़ो ।

जैसा । ७ गुण्य और ५ गुणक को देख के तुरंत ३५ पढ़ो और पांच सत्ते पैंतीस यों पढ़ने की अपेक्षा न करो । इसी भांति ५ और ३, ८ और ४, ० और २, ६ और ६, ४ और १२ ,६ और १३, ७ और १८ इत्यादि गुण्यगुणकों को देख के तुरंत १५, ३२, ०, ५४, ४८, ११७, १२६ इत्यादि गुणनफलों को पढ़ो ।

६७ । जब गुणन में दो अङ्कों के गुणनफल में तीसरा अङ्क जोड़ देना हो तब तुरंत गुणनफल और योग को मन में ले आके योग को पढ़ो ।

जैसा । ५ को ७ से गुण के उस में ३ जोड़ने हों तो तुरंत ३८ को पढ़ो और सात पंचे पैंतीस । पैंतीस और तीन अड़तीस यों न पढ़ो । इसी भांति ३, ४, ५ इन को देख के १७ पढ़ो । ३, ७, ६ यहां ३० पढ़ो । ७, २, ६ यहां २३ पढ़ो । इत्यादि । इस प्रकार से जो योग होगा उस में जो और एक अङ्क जोड़ना हो तो उस को भी मन ही में जोड़ के सब योग को पढ़ो । जैसा २, ३, ४, ५ यहां २ को ३ से गुण के उस में ४ जोड़ के फिर ५ जोड़ो । यह सब क्रिया मन में कर के तुरंत १५ पढ़ो । यों हि ३, ४, ०, ७ यहां १६ पढ़ो । ४, ०, ५, ८ यहां १३ पढ़ो । ६, ८, ७, ३ यहां ८२ पढ़ो । इत्यादि ।

६८ । जब दो अङ्कों के गुणनफल में तीसरा जोड़ के योग को चौथे अङ्क में घटाना हो तब पहिले तीन अङ्कों का फल (६७) वे प्रक्रम से जान के तुरंत (३९) वें प्रक्रम से अन्तर पढ़ो ।

जैसा । ३, ४, ५, ६ को देख के ९ पढ़ो और तीन चौके बारह, बारह और पांच सत्रह, सत्रह छब्बीस में गये बचे नौ यों न कहो । योंहि २, ५, ७, ३ यहां तुरंत ६ कहो । ३, २, १, ५ यहां ८ कहो । इत्यादि ।

६९ । भागहार में जो भाज्य की संख्या २०० से छोटी हो और भाजक २० से छोटा हो तब कण्ठ किये हुए पहाड़ों की सहायता से तुरंत लब्धि और शेष जान लेओ ।

जैसा । ६७ भाज्य और ९ भाजक देख के तुरंत ७ लब्धि और ४ शेष जानो ।

७० । नीचे गुणन का उदाहरण लिखा है । इस उदाहरण के करने में उन्हीं संख्याओं को केवल पढ़ना चाहिये जो उस उदाहरण की दहिनी ओर लिखी हैं । और अधिक कहना कुछ आवश्यक नहीं है तब (४०) वे प्रक्रम से योग करो । दहिनी ओर के अङ्कों में जिन पर स्वर नहीं दिया है वे हाथ लगे समझो ।

गुण्य	५०३७६२४	
गुणक	८३९७	
	३५२६३३६८	२८', १६', ४३', ५३', २६', २', ३'५',
	४५३३८६१६	३६', २१', ५६', ६८', ३३', ३', ४'५',
	१५११२८७२	१२', ७', १८', २२', ११', १', १'५',
	४०३००९९२	३२', १९', ४९', ६०', ३०', ३', ४'०',
गुणनफल	४२३००९२८७२८	

७१ । अथवा (६७) वें प्रक्रम का अच्छी भांति अभ्यास करके तब गुणनफल जानने के लिये यों करो कि पहिले गुणक के एक स्थान के अङ्क से सकल गुण्य को गुण देने से जो फल होगा सो उस के स्थान में लिखो तब जैसा गुणक के दशस्थान के अङ्क से समग्र गुण्य को गुण के फल को पहिले फलके दशस्थान के नीचे से लिखते हैं तैसा न लिखो किंतु गुणक के दशस्थान के अङ्क से गुण्य के एकस्थान के अङ्क को गुण के गुणनफल को तुरंत हि पूर्वफल में दशस्थान के अङ्क में जोड़ देओ तब गुणक के उसी अङ्क से गुण्य के दशस्थान के अङ्क को गुण के गुणनफल

को पूर्वफल में शतस्थान के अङ्क में जोड़ देओ । इसी भांति अन्त तक जोड़ने से जो फल सिद्ध होगा सो गुणक के ऊपर के दो अङ्कों की संख्या और गुण्य इन का गुणनफल होगा । फिर इस गुणनफल के शत आदि स्थानों के अङ्कों में गुणक के शत आदि स्थान के अङ्क से गुण्य के एक आदि स्थान के अङ्कों को गुण के फलों को क्रमसे पूर्ववत् जोड़ देओ । इसी भांति गुणक के सब अङ्कों से गुण के तुरंत हि जोड़ दिया करो यों क्रम से जोड़ देने से अन्त में गुण्यगुणकों का गुणनफल लाघव से सिद्ध होगा । जैसा । नीचे दिखलाया है ।

गुण्य	५०३७६२४	
गुणक	८३९७	
	३५२६३३६८	इस में पहिलो पंक्ति गुण्य का
	४८८६४९५२८	और ७ का गुणनफल है । दूस-
	१९९९९३६७२८	री ९७ का, तीसरी ३९७ का और
गुणनफल	४२३००९२८७२८	अन्त की ८३९७ का गुणनफल है ।

७२ । अथवा जब गुणक की संख्या १० और २० के बीच में है तब गुणक के एकस्थान के अङ्क से गुण्य के हर एक अङ्क को गुण के फल में उस २ अङ्क की दहिनी ओर का अङ्क जोड़ के योग को गुणनफल के स्थान में लिखो । इस क्रिया के लिये (६७) वे प्रक्रम का अच्छी भांति अभ्यास रक्खो ।

उदाहरण

गुण्य	७८०६५	यहां १५', १६+५=२''४', २+६=८', २४+० = २''४',
गुणक	१३	२३+८=३''१' और ७+३=१''०' । इस में एक स्वर
गुणनफल	१०१४८४५	का अङ्क गुणनफल के स्थान में लिखो और दो स्वर

का हाथ लगा समझो ।

इसी भांति जब गुणक की संख्या ११० से अधिक और १२० से छोटी हो तब दहनी ओर के दो २ अङ्क जोड़ दिया करो इतना हि विशेष है । यह नीचे के उदाहरण को देखने से स्पष्ट होगा ।

गुण्य	५८६३४	यहां २''८', २३+४=२''७', ६५+३+४=७''२',
गुणक	११७	६३+९+३=७''५', ४२+८+९ = ५''९',
गुणनफल	६८६५२७८	५+५+८ = १''८', १+५=६' ।

इसी प्रकार से और भी जानो ।

७३ । अथवा जब गुणक की संख्या ऐसी हो कि जिस में कोइ एक अङ्क जोड़ देने से योग की संख्या में ऊपर कितने एक शून्य हो जावें । तब गुण्य को उस योग की संख्या से गुण के फल में उस क्षेपक अङ्क से गुणे हुए गुण्य को घटा देओ और शेष गुणनफल जानो ।

इस की युक्ति (४४) वे प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त के अनुमान से स्पष्ट है।

यहां क्षेपक अङ्क से समग्र गुण्य को गुण के तब फल में घटा देने का परिश्रम मत करो किंतु उस क्षेपक अङ्क से गुण्य के एक स्थान के अङ्क को गुण देने से जो संख्या होगी उसीको तुरंत फल के एकस्थान के अङ्क में (६८) वे प्रक्रम के अनुसार घटा देओ। और इसी भांति क्षेपक अङ्क से गुण्य के दश आदि स्थान के अङ्कों को गुण के क्रम से घटाओ ।

उदा० । ३५७८ इस को २६७ से गुण देओ ।
यहां २६७ में जोड़ देने से ३०० होते हैं ।
इस लिये ऊपर की रीति से　३५८७
　　　　　　　　　　　　३००
　　　　　　　　　　　१०७६१००
गुणनफल　　　　　　　१०६५३३६

इसी भांति पूर्वोक्त उदाहरण में गुणक ८३६७ है इस में ३ जोड़ देने से ८४०० होता है

इस लिये गुण्य　　५०३७६२५
　　　　　　　　　　८४००
　　　　　　　२०१५०४६६००
　　　　　　४२३१६०४१६००
गुणनफल　　४२३००६२८७२८　　यह लाघव से होता है ।

७४ । अथवा । जब गुणक की संख्या ऐसी हो कि जिस को किसी एक अङ्क से गुण देने से फल के ऊपर कितने एक शून्य हो जावें तब गुण्य को उस फल से गुण के उस में उसी अङ्क का भाग देओ जो लब्ध होगा सो अभीष्ट गुणनफल है ।

उदा० (१) ४६६७ को १२५ से गुण देओ ।
यहां १२५ को ८ से गुण देने से १००० होता है ।
इस लिये　　　　４६६७
　　　　　　　　१०००
　　　　८)४६६७०००
　　　　　६२०८७५　यह गुणनफल है ।

उदा० (२) २१५३७ को ६२५ से गुण देखो ।
यहां ६२५ को १६ से गुण देने से गुणनफल १०००० होता है
इस लिये १६) २१५३७००००

१३४६०६२५ यह गुणनफल है ।

७५ । अब भागहार में जब भाजक में एक हि अङ्क होगा तब भाज्य की बांई ओर में भाजक लिख के भाज्य के नीचे एक रेखा खींचो तब लब्धि के अङ्क का और भाजक का गुणनफल और उस गुणनफल का और अन्त्य भाज्य का अन्तर मनहीं में पढ़के लब्ध हुए अङ्कों को रेखा के नीचे लिखो जैसा पहिले ह्रस्व भागहार में लिखा है ।

जैसा । ४) १३५१०८७

३३६७७१ और शेष ३

यह क्रिया करने के समय में केवल इतने अङ्क पढने चाहिये ३, १ । ३, ३ । ६, ३ । ७, २ । ७, ० । १, ३ ।

और जो भाजक में बहुत अङ्क हों तौ भी लब्धि के अङ्क से समग्र भाजक को गुण के अन्त्यभाज के नीचे मत लिखो किंतु तुरंत उस में घटा के शेष लिखो । उस शेष के जानने का प्रकार यह है कि लब्धि का अङ्क और भाजक का पहिला अर्थात् ऊपर का अङ्क इन के गुणनफल में जिस अङ्क को जोड़ देने से योग का ऊपर का अङ्क अन्त्यभाज्य के ऊपर के अङ्क के समान हो उस अङ्क को शेष के एकस्थान में लिखो । तब योग के दशक को अर्थात् हाथ लगे अङ्क को लब्धि का अङ्क और भाजक का दूसरा अङ्क इन के गुणनफल में जोड़ के फिर उस में जिस अङ्क को जोड़ देने से योग का ऊपर का अङ्क अन्त्य भाज्य के दूसरे अङ्क के समान हो उस अङ्क को शेष के दशस्थान में लिखो यों अन्त तक करने से शेष स्थान में जो संख्या होगी सो शेष होगा और लब्धि के स्थान में जो संख्या होगी सो लब्धि होगी । यह सब क्रिया (६८) वे प्रक्रम के अभ्यास से करो ।

उदा०

५२३१) ३५४२६६८३१ (६७७२५	यहां पहिला अन्त्यभाज्य ३५४२६ है
४०४०६	इस से ४०४० शेष पाने के लिये केवल
३७६२८	इन संख्याओं को पढना चाहिये । ६, ०,
१३११३	६' । १८, ४, २"२' । १४, ०, १"४' । ३१,
२६५११	४, ३"५' । यही प्रकार और शेषों के
३५६ शेष	लिये भी जानो ।

७६ । अथवा जो भाजक को किसी छोटी संख्या से गुण देने से गुणनफल के ऊपर बहुत शून्य हो जावें तो छोटी संख्या से भाज्य को गुण के उस में उस गुणनफल का भाग देओ तो लाघव से लब्धि मिलेगी और जो शेष बचे उस में उस छोटी संख्या का भाग देओ सो वास्तव शेष होगा । इस की युक्ति (५९) वे प्रक्रम के सातवें सिद्धान्त से स्पष्ट है ।

उदा०(१) ६९८३१७ में २५ का भाग देओ ।
यहां २५ को ४ से गुण देने से १०० होता है ।
इस लिये ६९८३१७
४
१००) २७९३२६८
२७९३२ लब्धि और ६८ ÷ ४=१७ शेष है ।

उदा०(२) ३५९४२०६८ में ६२५ का भाग देओ ।
यहां ६२५ को १६ से गुण देने से १०००० होता है ।
इस लिये ३५९४२०६८
१६
१००००) ५७५०७३०८८
५७५०७ लब्धि और ३०८८ ÷ १६ = १९३ शेष है ।

७७ । गुणनफल की प्रतीति करने का प्रकार ।

किसी संख्या से गुण्य और गुणक को तष्ट करो अर्थात् भाग लेके अवशेषित करो फिर तष्ट किये हुए गुण्यगुणकों के गुणनफल को और पूरे गुण्यगुणकों के गुणनफल को उसी संख्या से तष्ट करो । जो यों तष्ट किये हुए दोनों गुणनफल तुल्य हों तो पूरे गुण्यगुणकों का गुणनफल प्राय शुद्ध होगा और जो तुल्य न हों तो वह गुणनफल निश्चय से अशुद्ध होगा ।

जैसा । १७ गुण्य और १२ गुणक है । इन को ७ से तष्ट करो तो क्रम से ३ और ५ होते हैं । इन तष्ट किये हुए गुण्यगुणकों का गुणनफल १५ है और पूरे गुण्यगुणकों का गुणनफल २०४ है । इन दोनों १५, २०४ गुणनफलों को ७ से तष्ट करो (अर्थात् भाग लेके शेषित करो) तो १, १ ये तष्ट किये हुए गुणनफल तुल्य हि होते हैं ।

७८ । इस की उपपत्ति दिखलाते हैं ।

१७ के ऐसे दो विभाग कल्पना करो कि एक ७ से निःशेष हो और दूसरा शेष रहे सो जैसे १४ और ३ ये दो विभाग हैं । इस हर एक विभाग को १२ से गुण के फलों का योग करो तो भी वह (४४) वे प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त से १७ और १२ के गुणनफल के तुल्य होगा ।

अर्थात् १७ × १२ = १४ × १२ + ३ × १२

अब इस में ३ × १२ इस दूसरे विभाग में १२ के ऐसे दो विभाग कल्पना करो कि एक ७ से निःशेष हो और दूसरा शेष हो । सो जैसे ७ और ५ ये दो विभाग हैं । तब (४४) वे प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त के अनुसार ३ × १२ = ७ × ३ + ५ × ३

इस लिये १७ × १२ = १४ × १२ + ७ × ३ + ५ × ३

अर्थात् १७ और १२ का गुणनफल १४ × १२, ७ × ३ और ५ × ३ इन तीन विभागों का योग है और इस में १४ × १२ और ७ × ३ इन दो विभागों का ७ से निःशेष होना तो स्पष्ट हि है । इस लिये १७ और १२ इन के गुणनफल में ७ का भाग देओ तो वही शेष रहेगा जो ५ × ३ इस तीसरे विभाग में (अर्थात् ७ से तष्ट किये हुए जो १७ और १२ इन के गुणनफल में) ७ का भाग देने से शेष रहेगा । इस से गुणनफल की प्रतीति करने की रीति की उपपत्ति स्पष्ट होती है ।

७९ । अब तष्ट करने हारी सब संख्याओं में ९ और ११ ये १० के पास की दो संख्या अत्यन्त उपयोगी, हैं । इस लिये पहिले किसी संख्या को ९ से तष्ट करने का अर्थात् उस संख्या में ९ का भाग देने से जो शेष बचे उस के जानने का प्रकार लिखते हैं । सो यह है ।

जिस संख्या को ९ से तष्ट करना हो उस की बांईं ओर के अन्त के अङ्क को उस के पास के अङ्क में जोड देओ । उस योग को फिर उस के पास के अङ्क में जोड देओ । इस प्रकार से आगे भी करो । इस में जो योग ९ के समान वा उस से अधिक होगा उस में से तुरंत ९ घटा दिया करो । यों करते२ अन्त में जो संख्या होगी सो ९ से तष्ट संख्या होगी अर्थात् पूर्व संख्या में ९ का भाग देने से वही शेष रहेगा ।

जैसा । २३१४७०८५५६ इस संख्या को ९ से तष्ट करना है । तब ऊपर के विधि के अनुसार वहां बांईं ओर के अङ्क से जोड़ने का आरम्भ करके इन अङ्कों को पढो । २, ५ (अर्थात् २ + ३), ६ (अर्थात् ५ + १), १ (अर्थात् ६ + ४ − ९), ८ (अर्थात् १ + ७), ७ (अर्थात् ८ + ८ − ९), ३ (अर्थात् ७ + ५ − ९), ८ (अर्थात् ३ + ५), ५ (अर्थात् ८ + ६ − ९) । इस प्रकार से २३१४७०८५५६ इस संख्या को ९ से तष्ट करो तो वह ५ होती है अर्थात् उस में ९ का भाग देने से शेष ५ रहता है ।

यों हि ३५०८४२७१ इस को ६ से तष्ट करना हो तो ऊपर के विधि से ३, ८, ७, २, ४, २, ३ ये अङ्क पढ़ो । इस लिये ३५०८४२७१ इस में ६ का भाग देने से ३ शेष रहता है ।

८० । इस विधि की उपपत्ति ।

किसी संख्या में ६ का भाग देने से जो शेष रहे उस संख्या में जो नौ गुनी उसी संख्या को जोड़ के योग में ६ का भाग देओ तो भी वही शेष रहेगा कारण जोड़ी हुई नौ गुनी संख्या ६ से निःशेष होती हि है । परंतु किसी संख्या में ६ गुनी वही संख्या जोड़ दिई जावे तो योग वही संख्या दस गुनी होगी । इस से यह सिद्ध होता है कि किसी संख्या में ६ का भाग देने से जो शेष रहता है उसी संख्या को दस गुनी करके जो उस में ६ का भाग दिया जावे तो भी वही शेष रहेगा । इस लिये किसी संख्या के ऊपर का एक अङ्क छोड़ के पीछे की संख्या का ६ से शेष जानो । अब जो ऊपर का अङ्क शून्य हो तो (ऊपर की युक्ति से) पूरी संख्या का भी वही शेष होगा । जो संख्या के ऊपर कोइ अङ्क हो तो पीछे की संख्या के शेष का और उस अङ्क का योग पूरी संख्या का शेष होगा । जो वह योग ६ वा नौ से अधिक हो तो उस में ६ घटा देने से जो शेष बचे सो वास्तव शेष होगा यह स्पष्ट है । इस से ६ से तष्ट करने के विधि का कारण स्पष्ट प्रकाशित होता है । सो ऐसा । २३१४७०८५५६ इस ऊपर दिई हुई संख्या में बांई ओर का पहिला अङ्क २ इस में ६ का भाग देने से २ यही शेष बचेगा । यही शेष (ऊपर की युक्ति से) २० का भी होगा इस लिये २ इस शेष का और ३ का योग ५ यह २३ का शेष होगा । इसी युक्ति से ५ इस शेष का और १ का योग ६ यह २३१ का शेष होगा । इस से स्पष्ट है कि इसी प्रकार से आगे शेषों को जानने से अन्त में समग्र संख्या का शेष होगा ।

अनुमान १ । जब कि बांई ओर से दो २ अङ्कों का योग करते जाने से और जो बीच २ में योग ९ से अधिक हो तो उस में ९ को घटाते जाने से अन्त में शेष वास्तव रहता है तो स्पष्ट है कि जो पहिले हि किसी संख्या के सब अङ्कों का योग करो और फिर उस में ९ का भाग देओ तो भी वास्तव हि शेष रहेगा ।

अनुमान २ । इस से यह भी स्पष्ट है कि जिस संख्या के सब अङ्कों का योग ९ से निःशेष होगा वह समग्र संख्या ९ से निःशेष होगी ।

८१ । अब किसी संख्या को ११ से तष्ट करने का अर्थात् उस संख्या में ११ का भाग देने से जो शेष बचे उस के जानने का प्रकार लिखते हैं ।

जिस संख्या को ११ से तष्ट करना हो उस को बांई ओर के अङ्क को उस के पास के अङ्क में घटा देओ । शेष को फिर उस के पास के

और अङ्क में घटा देओ। यों हि आगे भी करो। अन्त में जो अङ्क शेष रहे वही तष्ट संख्या है। यहां घटाने में जो किसी शेष से उस के पास का अङ्क छोटा हो तो उस अङ्क में ११ जोड के तब उस में शेष को घटा देओ।

जैसा। ३४२७१८१५ इस संख्या को ११ से तष्ट करना हो तो ऊपर के विधि से इन अङ्कों को पढ़ो। ३, १ (अर्थात् ४ – ३), १ (अर्थात् २ – १), ६ (अर्थात् ७ – १), ६ (अर्थात् १ + ११ – ६), २ (अर्थात् ८ – ६), १० (अर्थात् १ + ११ – २), ६ (अर्थात् ५ + ११–१०)। इस लिये ३४२७१८१५ इस संख्या को ११ से तष्ट करो तो ६ होती है अर्थात् इस संख्या में ११ का भाग देने से ६ शेष रहता है।

इसी भांति ५०४८३६१४ इस को ११ से तष्ट करना है तो ऊपर के विधि से ये अङ्क जानो। ५, ६, ६, १०,-४, ५, ७, ८ इस लिये ५०४८३६१४ इस में ११ का भाग देने से ८ शेष बचता है।

८२। इस विधि की उपपत्ति।

जो संख्या ११ से निःशेष होगी उस को जो ११ गुनी उसी संख्या में घटा देओ तो स्पष्ट है कि अन्तर भी ११ से निःशेष होगा। और जिस संख्या में ११ का भाग देने से कुछ शेष बचता हो उस संख्या को जो ११ गुनी उसी संख्या में घटा देओ और उस अन्तर में ११ का भाग देओ तो तुरंत मन में आवेगा कि यहां वही शेष होगा जो उस संख्या के शेष को ११ में घटा देने से शेष बचेगा। परंतु जिस किसी संख्या को ११ गुनी उसी संख्या में घटा देओ तो अन्तर उसी संख्या से १० गुना होगा। इस से यह स्पष्ट सिद्ध होता है कि किसी संख्या को १० से गुण के गुणनफल में ११ का भाग देओ तो वही शेष रहेगा जो उस संख्या में ११ का भाग देने से बचे हुए शेष को ११ में घटा देने से शेष बचे। इस लिये किसी संख्या के ऊपर के अङ्क को छोड़ के पीछे की संख्या का ११ से शेष जानो। तब जो ऊपर का अङ्क शून्य हो तो उसी शेष को ११ में घटा देओ सो पूरी संख्या का शेष होगा (यह ऊपर की युक्ति से तुरंत मन में आवेगा) और जो संख्या के ऊपर कोइ अङ्क हो तो पीछे की संख्या के शेष को ११ में घटा देने से जो शेष बचे उस का और उस ऊपर के अङ्क का योग उस पूरी संख्या का शेष होगा। अर्थात् उस अङ्क के और ११ के योग में पीछे की संख्या के शेष को घटा देओ सो पूरी संख्या का शेष होगा। परंतु यह शेष ११ से बड़ा भी होगा जब पीछे की संख्या के शेष से ऊपर का अङ्क बड़ा होगा। तब इस शेष में ११ घटा देने चाहिये सो वास्तव शेष होगा। इस लिये यहां पीछे की संख्या के शेष को ऊपर के अङ्क में घटा देओ सो हि पूरी संख्या का वास्तव शेष होगा। इस से ११ से तष्ट करने के विधि की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है। सो ऐसी। ऊपर दिये हुए उदाहरण में ३४२७१८१५ इस संख्या में बांई ओर का पहिला अङ्क ३ इस में ११ का भाग देने से ३ यही शेष बचता है। अब ३४ में ११ से क्या शेष बचेगा? इस को बिचारने से तुरंत मन में आवेगा कि यहां पीछे की संख्या के ३ इस

शेष से ऊपर का अङ्क ४ बड़ा है इस लिये यहां ४−३ अर्थात् १ यही शेष होगा । इसी भांति आगे ३४२ संख्या का १ शेष होगा । ३४२७ का ६ शेष होगा । अब ३४२७१ इस संख्या में पीछे की संख्या के ६ इस शेष से १ यह ऊपर का अङ्क छोटा है । इस लिये १ इस के और ११ के योग में १२ पीछे की संख्या के शेष को ६ इस को घटा देने से ६ बचता है यही ३४२७१ इस संख्या का शेष होगा । इसी प्रकार से अन्त में जो शेष होगा सो हि समग्र संख्या का शेष होगा ।

८३ । किसी संख्या को ११ से तष्ट करने का दूसरा प्रकार ।

संख्या के विषम स्थान के अङ्कों के योग में ११ का भाग देके शेष जानो और इस भांति सब समस्थान के अङ्कों के योग का भी शेष जानो । फिर पहिले शेष में दूसरा शेष घटा देओ जो बचे सो हि ११ से तष्ट संख्या होगी । जो कदाचित् पहिले शेष से दूसरा शेष बड़ा हो तो पहिले शेष में ११ जोड के योग में दूसरा शेष घटा देओ जो बचे सो ११ से तष्ट संख्या होगी ।

जैसा । ३७५९६ इस संख्या को ११ से तष्ट करना है तब इस के विषम स्थान के ६, ५ और ३ इन अङ्कों का योग १४ इस का ११ से शेष ३ है । इसी भांति समस्थान के अङ्कों का योग १६ इस का ११ से शेष ५ है । यहां पहिले शेष से ३ दूसरा शेष ५ बड़ा है इस लिये पहिले शेष में ११ जोड के १४ इस योग में दूसरे शेष को ५ घटा देने से ९ बचता है यही ११ से तष्ट संख्या है ।

८४ । इस प्रकारकी उपपत्ति ।

जिस संख्या को ११ से तष्ट करना है उस के ऐसे दो विभाग कल्पना करो कि एक में सब सम स्थानों में शून्य हों और दूसरे में सब विषम स्थानों में शून्य हों । जैसे ३७५९६ इस संख्या के ३०५०६ और ७०९० ये दो विभाग हैं । तब ३०५०६ इस विभाग में

$$
\begin{aligned}
६ &= &+६\\
५०० &= ५ \times ९९ &+५\\
३०००० &= ३ \times ९९९९ &+३
\end{aligned}
$$

इस लिये ३०५०६ = ५ × ९९ + ३ × ९९९९ + ६ + ५ + ३ । इस में ५ × ९९ और ३ × ९९९९ ये दो खण्ड ११ से निःशेष होते हैं । इस से स्पष्ट है कि ३०५०६ इस में ११ का भाग देने से वही शेष रहेगा जो ६, ५ और ३ इन तीनो के योग में ११ का भाग देने से शेष रहेगा । अर्थात् संख्या के विषम स्थान के अङ्कों के योग में ११ का भाग देने से संख्या के ३७५९६ पहिले विभाग का ३०५०६ शेष ३ रहता है ।

अब संख्या के दूसरे विभाग का जो १० वां अंश है ७०९ उस का भी ११ से शेष ५ ऊपर की युक्ति से तुरंत सूझ पड़ेगा । इस को ११ में घटा देने से जो बचे सो (८२)

वे प्रक्रम के अनुसार संख्या के दूसरे विभाग का ७०९० शेष ६ होगा अर्थात् संख्या के सम स्थान के अङ्कों के योग का ११ से जो शेष होगा उस को ११ में घटा देने से जो बचे सो संख्या के ३७५९६ दूसरे विभाग का ७०९० शेष होगा। इस में जो पहिले विभाग का शेष जोड़ देओ तो स्पष्ट है कि यही योग जो ११ से बड़ा न हो तो पूरी संख्या का शेष होगा। और जो यह योग ११ से बड़ा हो तो इस में अवश्य ११ घटा देने चाहिये। तब इस से यह शेष बचेगा जो संख्या के दूसरे विभाग के शेष को पहिले विभाग के शेष में घटा देने से बचेगा यही तब पूरी संख्या का शेष होगा। इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

अनुमान। किसी संख्या के विषम स्थान के और समस्थान के अङ्कों का अलग २ योग करके उन दोनों को ११ से तष्ट करो। जो वे तष्ट किये हुए दोनों योग परस्पर तुल्य हों तो वह संख्या ११ से निःशेष होगी और जो तुल्य न हों तो वह संख्या ११ से निःशेष न होगी।

८५। अब गुणनफल के प्रतीति के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं।

गुण्य	५९४७२३
गुणक	७१८६
	३५६८३३८
	४७५७७८४
	५९४७२३
	४१६३०६१
गुणनफल	४२७३६७९४७८

यहां गुण्य को ९ से तष्ट करने के लिये (७९) वे प्रक्रम के विधि के अनुसार ये अङ्क जानो ५, ५, ०, ७, ०, ३ यों तष्ट किया हुआ गुण्य ३ है। इसी भांति गुणक को ९ से तष्ट करने के लिये ये अङ्क जानो ७, ८, ७, ४ यों तष्ट किया हुआ गुणक ४ है और तष्ट किये हुए गुण्यगुणकों का गुणनफल १२ है इस को ९ से तष्ट करने से ३ होता है। अब पूरे गुण्यगुणकों का गुणनफल भी ऊपर के विधि से ९ से तष्ट करो। जैसा। ४, ६, ४, ७, ४, २, २, ६, ४, ३ तो भी ३ हि होता है। यों दोनो तष्ट किये हुए गुणनफल तुल्य हैं इस लिये (७७) वे प्रक्रम के अनुसार यह गुणनफल शुद्ध है।

इसी प्रकार से गुण्य को ११ से तष्ट करो तब ऊपर के विधि से ये अङ्क उत्पन्न होंगे ५, ४, ०, ७, ६, ८ इस प्रकार से तष्ट किया हुआ गुण्य ८ है। यों हि गुणक को ११ से तष्ट करने के प्रकार से ये अङ्क उत्पन्न होंगे ७, ५ ३, ३ इस लिये तष्ट किया हुआ गुणक ३ है। इन तष्ट किये हुए गुण्यगुणकों के गुणनफल को २४ ग्यारह से तष्ट करने से २ होता है। अब पूरे गुण्यगुणकों का गुणनफल भी ११ से तष्ट करो तब तष्ट करने के प्रकार से ४, ९, ९, ५, १, ६, ३, १, ६, २ ये अङ्क उत्पन्न होते हैं। यों ११ से तष्ट किया हुआ पूरा गुणनफल भी २ है। इसलिये (७७) वे प्रक्रम से यह गुणनफल शुद्ध है।

यों गुणनफल की प्रतीति करने के ये दो प्रकार इस लिये लिखे हैं कि जो दोनों प्रकार से गुणनफल की शुद्धता आवे तो गुणनफल प्रायः कदापि अशुद्ध न होगा।

८६ । भजनफल की अर्थात् भागहार की लब्धिकी प्रतीति करने का प्रकार ।

भाज्य, भाजक, लब्धि और शेष इन चारों को पहिले कहे हुए प्रकारों से ९ वा ११ से तष्ट करो । फिर तष्ट किये हुए भाजक और लब्धि के गुणनफल में तष्ट किया हुआ शेष जोड़ के योग को भी ९ वा ११ से तष्ट करो । वह तष्ट किया हुआ योग जो तष्ट किये हुए भाज्य के तुल्य हो तो जानो कि लब्धि प्राय शुद्ध है और जो तुल्य न हो तो लब्धि निश्चय से अशुद्ध है ।

```
भाजक          भाज्य        लब्धि
८३५७२) ३५८९१८०४६८१५ (४२८७८५
        २४८६२४
         ८१७८०६
          ६५६५८२
           ७१५७८१
            ४७२०५५
             ५४१९५ शेष
```

इस में ९ से तष्ट किया हुआ भाज्य ८, भाजक ७, लब्धि ८ और शेष ६ है । तष्ट किये हुए भाजक और लब्धि का गुणनफल ५६ और शेष ६ इनका योग ६२ है। यह ९ से तष्ट करने से ८ हुआ यह तष्ट किये हुए भाज्य के तुल्य है । इस लिये ४२८७८५ यह लब्धि शुद्ध है।

अथवा ११ से तष्ट किया हुआ भाज्य ७, भाजक ५, लब्धि ४ और शेष ९ है। तष्ट किये हुए भाजक और लब्धि का गुणनफल २० और शेष ९ इनका योग २९ है । यह ११ से तष्ट करने से हुआ ७ तष्ट किये हुए भाज्य के तुल्य है इस लिये लब्धि शुद्ध है ।

६ घातक्रिया ।

८७ । एक १ को किसी संख्या से बार२ गुण के जो उस संख्या को बढ़ाने की क्रिया है इस को घातक्रिया कहते हैं । इस में उस संख्या को मूल संख्या, वारसंख्या को घातमापक और उस संख्या से १ को बार२ गुण देने से अन्त में जो गुणनफल सिद्ध होगा उस को उस संख्या का (घातमापकसंख्यापूर्व) घात कहते हैं । अर्थात् किसी मूल संख्या से १ को एक बार गुण देने से जो फल होगा उस को उस

संख्या का एकघात कहते हैं, २ बार गुण देते से जो फल होगा उस को द्विघात वा वर्ग, ३ बार गुण देने से जो होगा उस को त्रिघात वा घन, ४ बार गुण देने से जो होगा उस को चतुर्घात, इसी प्रकार से आगे पञ्चघात, षड्घात इत्यादि कहते हैं ।

जैसा । ३ यह मूल संख्या है ।

तब १ × ३ = ३ यह ३ का एकघात है इस में घातमापक १ है ।

१ × ३ × ३ = ९ यह ३ का द्विघात वा वर्ग है, इस में घातमापक २ है ।

१ × ३ × ३ × ३ = २७ यह ३ का त्रिघात वा घन है, इस में घातमापक ३ है ।

१ × ३ × ३ × ३ × ३ = ८१ यह ३ का चतुर्घात है, इस में घातमापक ४ है

इसी भांति आगे पञ्चघात, षड्घात इत्यादि जानो । और इसी प्रकार से और संख्याओं के भी घात जानो ।

८८ । इस प्रक्रम में घातक्रिया के कुछ सिद्धान्त लिखते हैं ।

(१) पहिला सिद्धान्त । किसी संख्या का जो घात करना हो उस में घातमापक की संख्या जितनी होगी उतने स्थानों में उस संख्या को अलग२ लिखके उन सभों का गुणनफल करो सो उस संख्या का अभीष्टघात होगा ।

जैसा । ४ का त्रिघात अर्थात् घन करना है तब यहां घातमापक ३ है । इस लिये ४ × ४ × ४ = ६४ यह ४ का घन है ।

इस का कारण अति स्पष्ट है । क्यों कि जब ४ का घन करना इस का यही अर्थ है कि १ को ४ से तीन वार गुण देना । परंतु १ गुण्य हो वा गुणक हो वह गुणनफल में कुछ विकार नहीं करता । इस से इस सिद्धान्त की उपपत्ति स्पष्ट है ।

(२) दूसरा सिद्धान्त । किसी एक ही संख्या के दो वा बहुत घातों का गुणनफल उस संख्या का वह घात होता है जिस का घातमापक उन दो वा बहुत घातों के घातमापकों के योग के समान है ।

जैसा । २ का घन और चतुर्घात इन का गुणनफल २ का सप्तघात होगा ।

अर्थात् २ का घन = ८ और २ का चतुर्घात = १६

∴ ८ × १६ = १२८ यह २ का सप्तघात है ।

इस की उपपत्ति यह है ।

जब कि पहिले सिद्धान्त से सिद्ध है कि

$२^३ = २ \times २ \times २$ और $२^४ = २ \times २ \times २ \times २$

इसलिये $२^३ \times २^४ = (२ \times २ \times २) \times (२ \times २ \times २ \times २)$

$= २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ = २^७$ अर्थात् $२^{३+४}$

इस से दूसरे सिद्धान्त की उपपत्ति स्पष्ट है ।

अनुमान । किसी एक हि संख्या के दो घातों में जो बड़े घात में छोटे का भाग देओ तो भजनफल उस संख्या का वह घात होता है जिस का घातमापक उन दो घातों के घातमापकों के अन्तर के समान है ।

जैसा । २ के सप्तघात में २ के घन का भाग देना है तो भजनफल २ का चतुर्घात होगा ।

अर्थात् $२^{७} = १२८$ और $२^{३} = ८ \therefore १२८ \div ८ = १६$ यह २ का चतुर्घात है
अर्थात् $२^{७} \div २^{३} = २^{४} = २^{७-३}$

इस की उपपत्ति दूसरे सिद्धान्त के विपरीत विधि से स्पष्ट है ।

(३) तीसरा सिद्धान्त । किसी संख्या के घात का कोइ घात उस संख्या का वह घात होता है जिस का घातमापक पूर्व दो घातमापकों के गुणनफल के समान है ।

जैसा । २ के घन का वर्ग करना हो तो वह २ का षड्घात होगा
अर्थात् $२^{३} = ८$ और $८^{२} = ६४$ यह २ का षड्घात है
अर्थात् $(२^{३}) = २^{३ \times २} = २^{६} = ६४$

इस की युक्ति यह है ।

२ के घन का वर्ग $= २^{३} \times २^{३}$
ऊपर के (२) रे सिद्धान्त, से $= २^{३+३} = २^{३ \times २} = २^{६}$

यों यह सिद्धान्त उपपन्न हुआ ।

(४) चौथा सिद्धान्त । कोइ दो संख्याओं में पहिली संख्या का कोइ घात करो और वही घात दूसरी संख्या का भी करो और उन दो संख्याओं के गुणनफल का भी वही घात करो । तब इन तीन घातों में पहिले दो घातों का गुणनफल तीसरे घात के समान होता है ।

जैसा । २ और ३ ये दो संख्या हैं । और पहिली संख्या का घन ८ दूसरी संख्या का घन २७ और दो संख्याओं के गुणनफल का घन २१६ है ।
तब $८ \times २७ = २१६ = (२ \times ३)^{३}$ अर्थात् ६ के घन के समान है ।

इस की उपपत्ति इस भांति स्पष्ट होती है ।

जब कि $२^३ = २ \times २ \times २$ और $३^३ = ३ \times ३ \times ३$

$\therefore$ $२^३ \times ३^३ = २ \times २ \times २ \times ३ \times ३ \times ३$ अथवा (४४) वे प्रक्रम के तीसरे सिद्धान्त के दूसरे अनुमान से $= २ \times ३ \times २ \times ३ \times २ \times ३$

$$= (२ \times ३)^३ = ६^३ = २१६ ।$$

इसी प्रकार से तीन आदि संख्याओं में भी जानो ।

अनुमान । जिस संख्या के ऊपर कुछ शून्य हों उस का जो कोइ घात करना हो तो संख्या के ऊपर के शून्य छोड़ के बची हुई संख्या का वह घात करो और ऊपर के शून्यों की संख्या और घातमापक इन के गुणनफल की संख्या के तुल्य शून्य उस घात की संख्या के दहिनी ओर लिख देओ वह अभीष्टघात होगा ।

जैसा । ७०० इस का घन करना है ।

तब $७^३ = ३४३$ और यहां ऊपर के शून्यों की संख्या २ और घातमापक की संख्या ३ है इसलिये $२ \times ३ = ६$

$\therefore$ $(७००)^३ = ३४३००००००$ यह अभीष्टघन है ।

इस की युक्ति स्पष्ट है । क्यों कि

$\therefore$ $(७००)^३ = (७ \times १००)^३ = ७^३ \times १००^३$

$$= ७^३ \times (१०^२)^३ = ७^३ \times १०^{२ \times ३}$$

$$= ७^३ \times १०^६ = ३४३ \times १००००००$$

$= ३४३००००००$ यह सिद्ध हुआ ।

(५) पांचवां सिद्धान्त । किसी संख्या का एकघात वही संख्या होती है और शून्यघात १ होता है ।

इस की उपपत्ति यह है ।

(८७) वे प्रक्रम के अनुसार किसी संख्या का एकघात वही है जो उस संख्या से १ को एक बार गुण देने से गुणनफल होगा । परंतु यह अवश्य उसी संख्या के तुल्य होगा । इस से सिद्ध हुआ कि किसी संख्या का एकघात वही संख्या होती है ।

और किसी संख्या का शून्यघात (८७) वे प्रक्रम से वही है जो उस संख्या से १ को शून्य बार गुण देने से अर्थात् नहीं गुण देने से फल होगा । परंतु १ को किसी से न गुण देने से फल १ हि होगा । इस लिये हर एक संख्या का शून्यघात १ होता है यह सिद्ध हुआ ।

इसी युक्ति से यह तुरंत स्पष्ट होता है कि ० का भी शून्यघात १ हि होता है अर्थात् $०^० = १$

(६) छठवां सिद्धान्त । १ का कोइ घात १ हि होता है और ० का शून्यघात छोड और कोइ घात ० हि होता है ।

क्योंकि १ को चाहो उतनी बार १ से गुण देओ तौभी अन्त में गुणनफल १ हि होगा । इस से सिद्ध है कि १ का कोई घात १ हि होता है ।

इसी भांति ० को ० से चाहो उतनी बार गुण देओ अन्त में फल ० हि होगा। इसी लिये ० का हर एक घात ० होता है यह सिद्ध हुआ ।

८९ । इस में संख्या के विभागों से उस का वर्ग करने के प्रकार लिखते हैं ।

(१) पहिला प्रकार । जिस संख्या का वर्ग करना है उस के ऐसे दो विभाग कल्पना करो कि जिनका योग वह संख्या हो तब उन दो विभागों के अलग२ वर्ग करो और उन के योग में उन दो विभागों का गुणनफल दूना कर के जोड देओ । सो उस संख्या का वर्ग होगा ।

उदा० । १३ का वर्ग करो ।

कल्पना करो कि १३ के १० और ३ ये दो विभाग हैं

तब $१०^२ = १००$, $३^२ = ९$ और $२ \times १० \times ३ = ६०$

$\therefore$ $१०० + ९ + ६० = १६९$ यह १३ का वर्ग है ।

इस की उपपत्ति ।

१३ का वर्ग $= १३ \times १३ = १३ (१० + ३)$

$= १३ \times १० + १३ \times ३$ यह (४४) वे प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त से सिद्ध होता है ।

$= (१० + ३) \times १० + (१० + ३) \times ३$

$= १०^२ + ३ \times १० + ३ \times १० + ३^२$ यह भी उसी सिद्धान्त से होता है ।

$\therefore$ $१३^२ = १०^२ + ३^२ + २ \times ३ + १० = १०० + ९ + ६० = १६९$ यह उपपन्न हुआ ।

अनुमान । जो ऐसे दो राशि कल्पना करो कि उन का अन्तर वह अभीष्ट संख्या हो तो उन दो राशिओं के वर्गों के योग में उन दो राशिओं का दूना गुणनफल घटा देओ सो उस संख्या का वर्ग होगा ।

जैसा । जो १३ का वर्ग करना है । और २० और ७ ये मानो दो राशि हैं

तब $२०^२ = ४००$, $७^२ = ४९$ और $२ \times २० \times ७ = २८०$

$\therefore$ $४०० + ४९ = ४४९$ और $४४९ - २८० = १६९$ यह वर्ग है इस की युक्ति (४४) वे प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त के अनुमान से और ऊपर की उपपत्ति से स्पष्ट है ।

(२) दूसरा प्रकार । जिस संख्या का वर्ग करना है उस में कोई एक दूसरी संख्या जोड़ देओ और घटा देओ और उन योग और अन्तर के गुणनफल में उस दूसरी संख्या का वर्ग जोड़ देओ सो उस पहिली संख्या का वर्ग होगा ।

उदा० (१) १३ का वर्ग करो ।

यहां मानो दूसरी संख्या ३ है तब १३ + ३ = १६ और १३ − ३ = १०

∴ १६ × १० + ३² = १६० + ९ = १६९ यह १३ का वर्ग है ।

उदा० (२) ४९३ इस का वर्ग करो ।

यहां मानो दूसरी संख्या ७ है तब ४९३ + ७ = ५०० और ४९३ − ७ = ४८६

∴ ५०० × ४८६ + ७² = २४३००० + ४९ = २४३०४९ यह ४९३ का वर्ग है ।

इस प्रकार की उपपत्ति ।

१३ का वर्ग = १३ × १३ = १३ (१० + ३)
= १३ × १० + १३ × ३
= १३ × १० + (१० + ३) × ३
= १३ × १० + ३ × १० + ३²
= (१३ × ३) (१३ − ३) + ३²
} यह (४४) वें प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त से सिद्ध होता है ।
= १६ × १० + ९ = १६९ यह उपपन्न ।

अनुमान । इस दूसरे प्रकार से यह अर्थ निकलता है कि कोई दो संख्याओं के योग और अन्तर के गुणनफल में छोटी संख्या का वर्ग जोड़ देओ तो बड़ी संख्या का वर्ग होता है इस से स्पष्ट है कि जो बड़ी संख्या के वर्ग में छोटी का वर्ग घटा देओ अर्थात् कोई दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर करो तो उन दो संख्याओं के योग और अन्तर के गुणनफल के तुल्य होता है ।

९० । जिस संख्या में एक से अधिक अङ्क हैं उस का लाघव से वर्ग करने का प्रकार ।

जिस संख्या का वर्ग करना है उस को लिख के उस के नीचे एक रेखा खींचो फिर संख्या के एक स्थान के अङ्क से उसी अङ्क को गुण देने से जो फल होगा उस के एक स्थान के अङ्क को उस रेखा के नीचे एकस्थान में लिखो और दशस्थान के अङ्क को हाथ लगा समझो । फिर उसी एक स्थान के दूने अङ्क से संख्या का एक स्थान का अङ्क छोड़ पीछे की शेष बची संख्या को गुण देओ और फल में उस हाथ लगे अङ्क को जोड़ के योग को रेखा के नीचे जो अङ्क लिखा हैं उस के बांए भाग में लिख देओ । यों रेखा के नीचे जो अङ्कों की पंक्ति उत्पन्न होगी उस को पहिली पंक्ति कहो । फिर उसी शेष बची संख्या को मूल-संख्या मानो और उस पर से ऊपर के विधि से और एक अङ्कों की पंक्ति

उत्पन्न करो । इस दूसरी पंक्ति को पहिली पंक्ति के नीचे दो स्थान पीछे हटा के लिखो (अर्थात् ऐसे क्रम से लिखो कि पहिली पंक्ति के शत आदि स्थान के अङ्कों के नीचे क्रम से दूसरी पंक्ति के एक आदि स्थान के अङ्क आवें) । फिर इसी प्रकार से तीसरी, चौथी आदि पंक्तियों को उत्पन्न करो और हर एक पंक्ति को अपनी पूर्व पंक्ति के नीचे दो २ स्थान पीछे हटा के लिखो । यों अन्त तक करके यथास्थित सब पंक्तियों का योग करो सो उस संख्या का वर्ग होगा ।

जो मूल संख्या में कोइ शून्य हो तो जैसा गुणन में एक शून्य के लिये और एक स्थान छोड़ के नीचे का खण्ड गुणनफल लिखते हो तैसा इस में एक शून्य के लिये और दो स्थान छोड़ के नीचे की पंक्ति लिखो ।

उदा० (१) ९६७४ इस का वर्ग करो ।

यहां, मूल संख्या	९६७४	
	७७३७६	पहिली पंक्ति
	१३४८९	दूसरी "
	१११६	तीसरी "
	८१	चौथी "
	९३५८६२७६	यह ९६७४ इस का वर्ग है ।

उदा० (२) ८४९०३२५१ इस का वर्ग करो ।

यहां, मूल संख्या	८४९०३२५१	
	१६९८०६५०१	
	८४९०३२२५	
	३३९६१२४	
	५०९४०९	
	१५२०१	
	६५६	
	६४	
	७२०८५६२०३०३६९००१	यह ८४९०३२५१ इस का वर्ग है ।

९१ । ऊपर के प्रकार की उपपत्ति ।

जब ९६७४ इस संख्या का वर्ग करना है तब (८९) वे प्रक्रम के १ले प्रकार से ।

$$(९६७४)^{२} = (९६७०)^{२} + ९६७० \times ४ \times २ + (४)^{२}$$

इसी प्रकार से, $$(९६७०)^{२} = (९६००)^{२} + ९६०० \times ७० \times २ + (७०)^{२}$$

$$(९६००)^{२} = (९०००)^{२} + ९००० \times ६०० \times २ + (६००)^{२}$$

और $$(९०००)^{२} = (९०००)^{२}$$

$\therefore$ (९६७४)² = ९६७० × ४ × २ + (४)²
+ ९६०० × ७० × २ + (७०)²
+ ९००० × ६०० × २ + (६००)²
+ (९०००)²
= ९६७० × ८ + ४ × ४
+ ९६०० × १४० + ७० × ७०
+ ९००० × १२०० + ६०० × ६००
+ ९००० × ९०००
= ७७३६० + १६
+ १३४४००० + ४९००
+ १०८००००० + ३६००००
+ ८१००००००
= ७७३७६
+ १३४८९००
+ १११६००००
+ ८१००००००

ये अन्त में जो चार पंक्ति उत्पन्न हुई हैं इन में ऊपर के शून्यों को छेंक देने से

(९६७४)² = ७७३७६
१३४८९
१११६
८१
= ९३५८६२७६ यह वर्ग है।

इस से ऊपर के प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

अभ्यास के लिये उदाहरण।

(१) (६७)² = ४४८९ ।
(२) (४०९)² = १६७२८१ ।
(३) (५२६)² = २७६६७६ ।
(४) (६९४)² = ४८१६३६ ।
(५) (८३५)² = ६९७२२५ ।
(६) (९०८)² = ८२४४६४ ।
(७) (२०५८)² = ४२३५३६४ ।
(८) (३५०९)² = १२३१३०८१ ।
(९) (४९१७)² = २४१७६८८९ ।
(१०) (५८४६)² = ३४१७५७१६ ।
(११) (७६९०)² = ५९१३६१०० ।

(१२) $(७०१९)^२ = ४९२६६३६१$ ।

(१३) $(२९४५३)^२ = ८६७४७९२०९$ ।

(१४) $(५२७८२९)^२ = २७८६०३४५३२४१$ ।

(१५) $(४१८०३७२)^२ = १७४७५५१००५८३८४$ ।

(१६) $(५२१६५२४)^२ = २७२१२१२२६४२५७६$ ।

(१७) $(५८२३०३८)^२ = ३३९०७७७१५४९४४४$ ।

(१८) $(७३१८२०६)^२ = ५३५५६१३९०५८४३६$ ।

(१९) $(९८४३२७५)^२ = ९६८९००६२७२५६२५$ ।

(२०) $(१३०४६८२७)^२ = १७०२१९६९४७६७९२९$ ।

(२१) $(७६३९८४१२)^२ = ५८३६७१७३५६१२१७४४$ ।

(२२) $(८०६७३९१७)^२ = ६५०८२८०८८४१२२८८९$ ।

(२३) $(९३७०२४०००)^२ = ८७८०१३९७६५७६००००००$ ।

(२४) $(३९०५२८१७२)^२ = १५२५१२२५३१२५६६१५८४$ ।

(२५) $(५००२०८१०६)^२ = २५०२०८१४९३०८१०७२३६$ ।

(२६) $(३९४२१८२३६४)^२ = १५५४०८०१७९१०३२६२८४९६$ ।

(२७) $(४२८४३७५२६८)^२ = १८३५५८७१४३७०५००७१८२४$ ।

(२८) $(८५२६३७५२०४)^२ = ७२६९९०७४११९३८६०४१६१६$ ।

वर्गके प्रश्न ।

(१) किसी मनुष्य ने ४६७ पैसों के कुछ फल मोल लिये । उस में एक २ पैसे को उतने २ फल लिये जितने पैसों के उस ने सब फल लिये । तब कहो उस ने कितने फल मोल लिये ?

उत्तर, २१८०८९ ।

(२) किसी धनिक ने एक दिन अपने यहां पण्डितों को बुला के धन दिया । उस में ६२९ पण्डित थे हर एक को ६२९ हि रुपये दिये तो उस धनिक ने उस दिन सब कितने रुपये दान किया ? सो कहो ।

उत्तर, ३९५६४१ ।

(३) एक राजा ने जब अपनी सेना वर्गाकार खड़ी किई अर्थात् हर एक पंक्ति में ३१६ मनुष्य खड़े किये और उतनी हि सब पंक्ति किई तब उस सेना के १४४ मनुष्य शेष रहे । तब कहो उस सेना में सब मनुष्य कितने थे ।

उत्तर, १००००० ।

(४) गणित करके देखो कि २१२९८१९३, २०६२७४३२ और ७३७७८३२ इन तीन संख्याओं में दो २ संख्याओं का योग और अन्तर पूरा वर्ग होता है अर्थात् पहिली

और दूसरी संख्याओं का योग ६४७५ का वर्ग होता है, पहिली और तीसरी का योग ५३५५ का वर्ग है और दूसरी और तीसरी का योग ५२८२ का वर्ग है। इस भांति पहिली और दूसरी का अन्तर ८१६ का वर्ग है, पहिली और तीसरी का अन्तर ३७३१ का वर्ग है और दूसरी और तीसरी का अन्तरा ३६४० का वर्ग है।

(५) गणित करके दिखलाओ कि ४८७६, १२६५ और १०७१ इन तीन संख्याओं में दो २ संख्याओं के वर्गों का अन्तर पूरा वर्ग है अर्थात् पहिली और दूसरी के वर्गों का अन्तर ४७०४ का वर्ग है, पहिली और तीसरी के वर्गों का अन्तर ४७६० का वर्ग है और दूसरी और तीसरी के वर्गों का अन्तर ७२८ का वर्ग है।

(६) यह सिद्ध करो कि ८१६, १६८० और ३०८ इन तीन संख्याओं में पहिली और दूसरी के वर्गों का योग १८६८ का वर्ग है, पहिली और तीसरी के वर्गों का योग ८७५ का वर्ग है और दूसरी और तीसरी के वर्गों का योग १७०८ वर्ग है।

९२। किसी संख्या का लाघव से कोइ घात करने का प्रकार।

घातमापक की संख्या जो सम हो तो उस का आधा करो और जो विषम हो तो उस में १ घटा देओ। इस से जो संख्या बनेगी उस को दूसरा घातमापक कहो। फिर इसी प्रकार से इस दूसरे घातमापक से तीसरा, तीसरे से चौथा इत्यादि उत्तरोत्तर तब तक घातमापक सिद्ध करो जब तक घातमापक ० शून्य होवे। और इन सब घातमापकों को एक के नीचे एक इस क्रम से लिख के अन्त के शून्य घातमापक के सामने दहिनी ओर १ यह संख्या लिखो। फिर नीचे के घातमापक से उस के ऊपर का घातमापक जो १ अधिक हो तो नीचे के घातमापक के सामने की संख्या को मूल संख्या से गुण देओ और जो दूना हो तो नीचे की संख्या का (९०) प्रक्रम के प्रकार से वर्ग करो और उस गुणनफल वा वर्ग को उस ऊपर के घातमापक के सामने लिखो। यों उत्तरोत्तर क्रिया करने से सब के ऊपर पहिले उद्दिष्ट घातमापक के सामने जो संख्या बनेगी सो मूल संख्या का अभीष्ट घात होगा।

यहां हर एक घातमापक के सामने जो संख्या बनेगी सो मूल संख्या का उस २ घातमापक का संबन्धी घात होगा।

उदा० (१) ७ का २३ घात क्या होगा ?

यहां पहिला घातमापक	२३	२७३६८७४७३४००८०९१६३४३
दूसरा "	२२	३९०९८२१०४८५८२९८८०४९
३ रा "	११	१९७७३२६७४३
४ था "	१०	२८२४७५२४९
५ वां "	५	१६८०७
६ वां "	४	२४०१
७ वां "	२	४९
८ वां "	१	७
अन्त का "	०	१

(इन घातमापकों के संबन्धी घातों की संख्या इन के सामने लिखी हैं)

$\therefore$ $७^{२३}$ = २७३६८७४७३४००८०९१६३४३ ।

इस प्रकार की उपपत्ति इसी उदाहरण से स्पष्ट होती है सो ऐसी ।

जब कि हर एक संख्या का शून्यघात १ होता है इस लिये अन्त के शून्य घातमापक के सामने १ लिखा है। इस को ७ से गुण दिया है सो गुणनफल ७ का एक घात है फिर उस का वर्ग किया सो ७ का वर्ग है, फिर उस का भी वर्ग किया सो (८८) वे प्रक्रम के (३) रे सिद्धान्त से ७ का चतुर्घात है, इस को ७ से गुण देने से गुणनफल ७ का पञ्चघात हुआ। इस का वर्ग ७ का दशघात है। इस को ७ से गुण दिया सो ७ का ११ घात हुआ। इस का वर्ग ७ का २२ घात है फिर उस को ७ से गुण देने से गुणनफल ७ का २३ घात हुआ। इस लिये सब के ऊपर का घात मूलसंख्या का अभीष्ट घात होता है यह सिद्ध हुआ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $(२६)^{३}$ = १७५७६ ।

(२) $(३०५)^{३}$ = २८३७२६२५ ।

(३) $(४२८)^{३}$ = ७८४०२७५२ ।

(४) $(२०३५)^{३}$ = ८४२७३९२८७५ ।

(५) $(३५)^{४}$ = १५००६२५ ।

(६) $(४७)^{५}$ = २२९३४५००७ ।

(७) $(९)^{९}$ = ३८७४२०४८९ ।

(८) $(१३)^{१५}$ = ५११८५८९३०१४०९०७५७ ।

(९) $(६)^{२३}$ = ७८९७३०२२३०५३६०२८१६ ।

(१०) $(५)^{३२}$ = २३२८३०६४३६५३८६९६२८९०६२५ ।

(११) $(१७)^{१५}$ = २८६२४२३०५१५०९८१५७९३ ।

(१२) $(३)^{५०}$ = ७१७८९७९८७६९१८५२५८८७७०२४९ ।

(१३) इस नीचे लिखे हुए चक्र में हरएक पंक्ति की तीन २ संख्याओं का गुणनफल ७५६ इस मध्य संख्या के घन के समान होता है। वह पंक्ति खड़ी वा बेंडी वा कर्ण के आकार की हो। तब यह सब गणित करके देखो और हर एक पंक्ति की तीन संख्याओं का गुणनफल वा मध्यसंख्या का घन क्या होता है सो कहो।

५०४	१७६४	४८६
७२९	७५६	७८४
११७६	३२४	११३४

उत्तर, ४३२०८१२१६।

(१४) यह गणित करके दिखलाओ कि ३, ४ और ५ इन तीन संख्याओं के घनों का योग ६ इस संख्या के घन के समान है। और ३५, ७० और ८५ इन तीनों के घनों का योग १०० के घन के समान है और ३१९, ४३५ और ७८३ इन तीन संख्याओं के घनों का योग ८४१ इस संख्या के घन के समान होता है।

(१५) यह गणित से सिद्ध करो कि ४१२१३२ और ६३०२४ इन दो संख्याओं के वर्गों का योग ६५० इस संख्या के चतुर्घात के समान होता है। ११७५७०७ और १६९६५० इन दोनों के वर्गों का योग २६९ इस का पञ्चघात होता है और ६११६०३० और १२०५८११३ इन दोनों के वर्गों का योग १०९ इस का सप्तघात होता है।

७ मूलक्रिया।

९३। जो संख्या जिस दूसरी संख्या का जो घात होगा उस संख्या का वह दूसरी संख्या वही घातमूल कहाती है। इस मूल जानने के प्रकार को मूलक्रिया कहते हैं।

जैसा। ३ का द्विघात वा वर्ग ९ है ∴ ९ का द्विघातमूल वा वर्गमूल ३ है
४ का त्रिघात वा घन ६४ है ∴ ६४ का त्रिघातमूल वा घनमूल ३ है
२ का चतुर्घात १६ है ∴ १६ का चतुर्घातमूल २ है।
इत्यादि।

और घातक्रिया में जैसा वर्ग, घन, चतुर्घात इत्यादि घातों के क्रम से २, ३, ४ इत्यादि संख्या घातमापक कहाती हैं वैसा इस मूलक्रिया में वर्गमूल, घनमूल, चतुर्घातमूल इत्यादि मूलों के क्रम से २, ३, ४ इत्यादि संख्या मूलमापक कहाती हैं। और यहां वर्गमूल को कभी २ 'मूल' कहते हैं। जैसा ९ का वर्गमूल ३ है यहां ९ का मूल ३ ऐसा भी कभी २ कहते हैं।

९४। यहां जानना चाहिये कि सब संख्याओं के मूल नहीं होते। जैसा १, ४, ९, १६ इत्यादि संख्याओं के वर्गमूल क्रम से १, २, ३, ४ इत्यादि हैं परंतु और जो संख्या हैं जैसी। २, ३, ५, ६ इत्यादि इन के ठीक मूल नहीं होते (इस की उपपत्ति आगे (१४७) वे प्रक्रम में देखो) इस लिये जिन के वर्गमूल ठीक मिलते हैं जैसी। १, ४, ९, १६

इत्यादि ये वर्गसंख्या कहाती हैं और जिन के वर्गमूल ठीक नहीं होते उन को अवर्ग कहते हैं । जैसा । २, ३, ५, ६ इत्यादि संख्या अवर्ग हैं । और अवर्ग संख्या के पास उस से छोटी जो वर्ग संख्या होगी उस के वर्गमूल को उस अवर्ग संख्या का निरग्रमूल कहते हैं । जैसा । ६ का निरग्रमूल २ है, १३ का निरग्रमूल ३ है इत्यादि ।

९५ । इस में विद्यार्थियों को अभ्यास के लिये इस नीचे लिखे हुए वर्गचक्र में १ से १०० तक संख्याओं के वर्ग लिखे हैं ।

वर्गचक्र ।

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
१	१	२१	४४१	४१	१६८१	६१	३७२१	८१	६५६१
२	४	२२	४८४	४२	१७६४	६२	३८४४	८२	६७२४
३	९	२३	५२९	४३	१८४९	६३	३९६९	८३	६८८९
४	१६	२४	५७६	४४	१९३६	६४	४०९६	८४	७०५६
५	२५	२५	६२५	४५	२०२५	६५	४२२५	८५	७२२५
६	३६	२६	६७६	४६	२११६	६६	४३५६	८६	७३९६
७	४९	२७	७२९	४७	२२०९	६७	४४८९	८७	७५६९
८	६४	२८	७८४	४८	२३०४	६८	४६२४	८८	७७४४
९	८१	२९	८४१	४९	२४०१	६९	४७६१	८९	७९२१
१०	१००	३०	९००	५०	२५००	७०	४९००	९०	८१००
११	१२१	३१	९६१	५१	२६०१	७१	५०४१	९१	८२८१
१२	१४४	३२	१०२४	५२	२७०४	७२	५१८४	९२	८४६४
१३	१६९	३३	१०८९	५३	२८०९	७३	५३२९	९३	८६४९
१४	१९६	३४	११५६	५४	२९१६	७४	५४७६	९४	८८३६
१५	२२५	३५	१२२५	५५	३०२५	७५	५६२५	९५	९०२५
१६	२५६	३६	१२९६	५६	३१३६	७६	५७७६	९६	९२१६
१७	२८९	३७	१३६९	५७	३२४९	७७	५९२९	९७	९४०९
१८	३२४	३८	१४४४	५८	३३६४	७८	६०८४	९८	९६०४
१९	३६१	३९	१५२१	५९	३४८१	७९	६२४१	९९	९८०१
२०	४००	४०	१६००	६०	३६००	८०	६४००	१००	१००००

इस चक्र में जो १ से १०० तक संख्याओं के वर्ग लिखे हैं वे अवश्य कण्ठ करने चाहिये । इस चक्र के अभ्यास से १ से ले के १०००० तक संख्याओं में वर्ग और अवर्ग संख्या तुरंत ज्ञात होती हैं । और भी इस का गणित में बहुत उपयोग है ।

९६ । अब कोइ संख्या चाहे वह १०००० से छोटी हो वा बड़ी हो उस का वर्गमूल जानने का साधारण प्रकार लिखते हैं ।

(१) जिस संख्या का वर्गमूल जानना है वह उद्दिष्ट संख्या कहावे और इस का वर्गमूल अभीष्टमूल कहावे । अब उद्दिष्ट संख्या के विषम स्थान के अङ्कों पर एक२ बिन्दु करो अर्थात् संख्या के एकस्थान के अङ्क पर पहिले बिन्दु लिख के फिर उस से बांई ओर एक २ अङ्क छोड के दूसरे २ अङ्क पर बिन्दु लिखो । यों बिन्दुओं से जो उद्दिष्ट संख्या के विभाग होंगे वे विषम कहावें । और वे बांई ओर के अन्त के विषम से ले के दहिनी ओर में उत्तरोत्तर पहिला विषम, दूसरा विषम, इत्यादि कहावें ।

(२) पहिले विषम में जो सब से बड़ी वर्गसंख्या घट सके उस का वर्गमूल लेओ अर्थात् पहिले विषम का वर्गमूल वा निरग्रमूल लेओ वह अभीष्टमूल का बांई ओर का पहिला अङ्क होगा । अब जैसा भागहार में भाज्य के दहिने भाग में लब्धि स्थान कल्पना किया है तैसा यहां उद्दिष्ट संख्या के दहिने भाग में मूलस्थान कल्पना कर के उस में अभीष्टमूल का वह अङ्क लिखो । और उस के वर्ग को पहिले विषम में घटा देओ ।

(३) तब जो शेष बचेगा उस के दहिने भाग में दूसरा विषम लिखो और इस से जो संख्या बनेगी उस को भाज्य कहो ।

(४) अभीष्टमूल के पहिले अङ्क को दूना कर के उस को इस भाज्य के बांए भाग में अर्थात् भाजकस्थान में लिखो और उस का नाम पंक्ति रक्खो । तब देखो कि भाज्य के ऊपर का एक अङ्क छोड़ के पीछे की संख्या में पंक्ति का भाग देने से क्या लब्ध होगा? वही लब्ध अभीष्टमूल का दूसरा अङ्क होगा । उस को मूल के पहिले अङ्क के और पंक्ति के दहिने भाग में लिखो ।

(५) उस पंक्ति को अभीष्टमूल के दूसरे अङ्क से गुण के गुणनफल को भाज्य में घटा देओ । जो कदाचित् वह गुणनफल भाज्य से बड़ा हो तो ऊपर जिस अङ्क को मूल का दूसरा अङ्क कहा है उस से छोटा ऐसा एक अङ्क कल्पना करो कि जिस से उस को पंक्ति को गुण देने से गुणनफल भाज्य से छोटा हो तब वही कल्पना किया हुआ छोटा

अङ्क अभीष्टमूल का दूसरा अङ्क होगा और तब उसी छोटे गुणनफल को भाज्य में घटा देओ ।

(६) जो शेष बचेगा उस के दहिने भाग में तीसरा विषम ज्ञोड़ देओ । और जो बनेगा उस को फिर भाज्य कहो ।

(७) पंक्ति के ऊपर के अङ्क को दूना करो और देखो कि भाज्य के ऊपर का एक अङ्क छोड़ के पीछे की संख्या में उस पंक्ति का भाग देने से क्या लब्ध होगा? वह लब्ध अभीष्टमूल का तीसरा अङ्क होगा। इस को मूल के और पंक्ति के दहिने भाग में लिखो ।

(८) तब ऊपर जो क्रिया लिखी है उसी के अनुसार आगे क्रिया करो । यों बार २ करने से अन्त में जो कुछ शेष न रहेगा तो मूलस्थान में जो संख्या होगी सो उद्दिष्ट संख्या का वर्गमूल होगा। और अन्त में जो शेष बचे तो जो वर्गमूल लब्ध हुआ है सो उद्दिष्ट राशि का निरग्र मूल होगा।

(९) जब ऊपर का एक अङ्क छोड़े हुए भाज्य में पंक्ति का भाग न लगता हो तब मूल और पंक्ति इन दोनों के दहिने भाग में शून्य लिख के उक्तवत् आगे क्रिया करो ।

उदा० (१) ६८८९ इस का वर्गमूल क्या है?

यहां उद्दिष्ट संख्या ६८८९ (८३ यह वर्गमूल है

```
१६३) ६४
     ----
     ·४८९
      ४८९
     ----
      ···
```

उदा० (२) ९३५८६२७६ इस का वर्गमूल क्या है?

यहां उद्दिष्ट संख्या ९३५८६२७६ (९६७४ यह वर्गमूल है ।

```
           ८१
          ----
  १८६)   १२५८
         १११६
         -----
 १९८७)  ·१४२६२
          १३४८९
         ------
१९३४४) · ·७७३७६
           ७७३७६
          ------
           ·····
          ------
```

अथवा (९५) वे प्रक्रम के वर्गचक्र का जो अच्छी भांति अभ्यास हो तो उस की सहायता से उद्दिष्ट संख्या को बांई ओर दूसरे विषम तक जो संख्या होगी उस का वर्गमूल वा निरग्रमूल जानो फिर लिखे हुए प्रकार के अनुसार आगे क्रिया करो। उस में भी जो पंक्ति का और मूल के अङ्क का गुणनफल भाज्य में घटा के शेष जानते हो वह भी (७५) वे प्रक्रम की रीति से जानो तो वर्गमूल निकालने में कुछ लाघव होगा। यह क्रिया ऊपर के (२) रे उदाहरण में दिखलाते हैं।

उद्दिष्ट संख्या ९३५८६२७६ (९६७४ वर्गमूल
९२१६
१९२७)·१४२६२
१९३४४)··७७३७६
·····

९७। वर्गमूल जानने के प्रकार की उपपत्ति।

पहिले (९०) प्रक्रम में जो संख्या का वर्ग करने का प्रकार लिखा है उस की ठीक उलटी रीति से यह वर्गमूल निकालने का प्रकार बनता है यह सुगमता से स्पष्ट होने के लिये (९०) प्रक्रम का वर्ग करने का पहिला उदाहरण क्रिया समेत यहां लिखते हैं।

मूल संख्या	९६७४
१ ली पंक्ति	७७३७६
२ री पं॰	१३४८९
३ री पं॰	१११६
४ थी प॰	८१
वर्ग	९३५८६२७६

यहां जो ९३५८६२७६ यह वर्ग सिद्ध हुआ है यही उद्दिष्ट संख्या है और इस के ऊपर जो चार पंक्ति एक के नीचे एक दो२ स्थान पीछे हटा के लिखी हैं उन का योग यह उद्दिष्ट संख्या है। इस से स्पष्ट है कि उद्दिष्ट संख्या में एक२ पंक्ति कहां तक है यह जानने के लिये बिन्दुओं से वर्ग संख्या के विषम विभाग किये हैं।

अब सब के नीचे जो पंक्ति ८१ है यह मूलसंख्या के पहिले अङ्क ९ का वर्ग है उस को बांई ओर से वर्ग संख्या में घटा देने से १२५८६२७६ यह शेष ऊपर की और तीन पंक्तिओं का योग बचता है। इस में बांई ओर दूसरे विषम तक जो १२५८ संख्या है इसी में तीसरी पंक्ति अर्थात् सब के नीचे की पंक्ति के ऊपर की पंक्ति १११६ है। यह मूल संख्या के ९ और ६ इन दो पहिले अङ्कों से (९० × २ + ६) × ६ = १८६ × ६ अथवा १११६ यों बनी है यह वर्ग करने के प्रकार से स्पष्ट है। इस लिये १११६ इस के ऊपर का ६ एक अङ्क छोड के १११ इस पीछे की संख्या में १०८ यह संख्या मूल के पहिले ९ और ६ इन दो अङ्कों का दूना गुणनफल है। इस लिये मूल के पहिले दूने अङ्क का १८ जो १०८ इस में भाग दिया जाये तो अवश्य मूल का दूसरा अङ्क लब्ध होगा। अब १०८ यह संख्या जो १११६ इस पंक्ति के १११ इस पीछे की संख्या में

है वही संख्या शेष के ऊपर ५८ दूसरा विषम जोड़ देने से जो १२५८ दूसरे विषम तक संख्या होती है उस के भी १२५ पीछे की संख्या में है। इस लिये मूल लेने के प्रकार में लिखा है कि (१२५८) भाज्य का ऊपर का अङ्क छोड के (१२५) पीछे की संख्या में मूल के दूने पहिले अङ्क का भाग देने से मूल का दूसरा अङ्क लब्ध होगा।

अब भाज्य की पीछे की जो १२५ संख्या है सो मूल संख्या के पहिले दो अङ्कों के १०८ गुणनफल से प्राय अधिक रहती है इस लिये भाज्य की १२५ पीछे की संख्या में मूल के दूने पहिले अङ्क का भाग देने से जो लब्ध होगा उस का कदाचित् मूल संख्या के दूसरे अङ्क से अधिक भी होने का संभव है परंतु तब उस से (९० × २ + ६) × ६ = १८६ × ६ अथवा १११६ यह फल अवश्य भाज्य से बड़ा होगा और १११६ दूसरी पंक्ति भाज्य से कभी बड़ी नहीं हो सकती इस लिये मूल लेने के प्रकार में लिखा है कि तब लब्ध हुए अङ्क से छोटा ऐसा मूल का दूसरा अङ्क कल्पना करो कि जिस से १११६ यह फल भाज्य से छोटा होवे।

इस प्रकार से मूल के ९, और ६ ये दो पहिले अङ्क ज्ञात होते हैं। अब ९६ इसी को मूल का पहिला अङ्क मान के ऊपर ही के युक्ति से मूल का तीसरा अङ्क ज्ञात होता है और इसी भांत आगे भी। यों वर्गमूल निकालने के प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $\sqrt{३२४}$ = १८।

(२) $\sqrt{१३६९}$ = ३७।

(३) $\sqrt{४०९६}$ = ६४।

(४) $\sqrt{७९२९}$ = ८९ और ८ शेष।

(५) $\sqrt{१३२२५}$ = ११५।

(६) $\sqrt{२४०२५}$ = १५५।

(७) $\sqrt{५३२९००}$ = ७३०।

(८) $\sqrt{७९३८८१}$ = ८९१।

(९) $\sqrt{१०९६२०९}$ = १०४७।

(१०) $\sqrt{२८२९१२४}$ = १६८२।

(११) $\sqrt{३७२८७६१}$ = १९३१।

(१२) $\sqrt{५०६२५००}$ = २२५०।

(१३) $\sqrt{१८९१८०१}$ = ४३४९।

(१४) $\sqrt{३८२९१३४४}$ = ६१८८।

(१५) $\sqrt{३९१२५०२५}$ = ६२५५।

(१६) √५८२६२६८९ = ७६३३ ।

(१७) √६२३४६८१६ = ७८९६ ।

(१८) √२३८७६४३०४ = १५४५२ ।

(१९) √३९६८२४४०३६ = ६२९९४ ।

(२०) √६८२३१७३००६२५ = ८२६०२५ ।

(२१) √३५०००६७७००२७६९ = ५९१६१३७ ।

(२२) √१३५७९९७५२८१९८८८०१ = ११६५३३१५१ ।

(२३) √९०६८१५२७४९९३५७४२१६१ = ३०११३३७३६९ ।

(२४) √४२१५२७३९१५६९०८४१५३९६ = ६४९२५१४०८६ ।

वर्गमूल के प्रश्न ।

(१) जिस संख्या का वर्ग १२०१०००२५ है वह संख्या क्या है?

उत्तर । १०००५ ।

(२) एक दाता के द्वार पर कुछ पुरुष, स्त्री और लड़के भीख मांगने के लिये खड़े थे। तब उस दाता ने उन में जितने पुरुष थे उतने हि उतने पैसे हर एक पुरुष को दिये और इसी भांति स्त्रियों को और लड़कों को भी दिये। यों सब पुरुषों को ७२२५ पैसे, स्त्रियों को ५३२९ पैसे और लड़कों को १७६४ पैसे दिये। तो वहां कितने पुरुष, स्त्री और लड़के थे सो कहो ।

उत्तर, ८५ पुरुष, ७३ स्त्री और ४२ लड़के ।

(३) ६८० और १११ इन दो संख्याओं के वर्गों का योग किस संख्या का वर्ग है ?

उत्तर, ६८९ ।

(४) ३८९ इस संख्या के वर्ग को १०६ से गुण के गुणनफल में १ घटा देओ तो किस संख्या का वर्ग शेष रहेगा ।

उत्तर, ४००५ ।

(५) जिस संख्या के वर्ग में एक जोड़ देओ तो योग में १०९ का वर्ग और ८५१५२५ इन दोनों का गुणनफल होता है सो संख्या क्या है?

उत्तर, ८८९०१८२

(६) ४६२०७९९ इस संख्या के वर्ग में १ घटा देओ और शेष में १२४ का भाग देओ तो लब्धि किस संख्या का वर्ग होगा ?

उत्तर, ४१४९६० ।

(७) ६५० के घन में १३४९८ का वर्ग घटा देओ तो शेष का वर्गमूल क्या होगा?

उत्तर, ९६१४ ।

प्रकीर्णांक ।

९८ । दो संख्याओं में जो छोटी संख्या से बड़ी संख्या निःशेष होवे अर्थात् छोटी का बड़ी में भाग देने से शेष कुछ न रहे तो वह छोटी संख्या बड़ी संख्या का अपवर्तन कहाती है और बड़ी संख्या को छोटी का अपवर्त्य कहते हैं ।

जैसा । १२ और ४ इन दो संख्याओं में १२ संख्या ४ से निःशेष होती है इस लिये १२ का ४ अपवर्तन है और ४ का १२ अपवर्त्य है ।

९९ । जब कि हर एक संख्या १ से निःशेष होती है तो संख्या मात्र का अपवर्तन १ हो सकता है और हर एक संख्या १ का अपवर्त्य है । परंतु यहां यह जानना चाहिये कि अपवर्तन और अपवर्त्य यह व्यवहार उन्हीं दो संख्याओं में है जिन में छोटी संख्या १ नहीं है ।

१०० । जो संख्या १ छोड किसी और संख्या से निःशेष नहीं होती उस को दृढ कहते हैं । जैसा २, ३, ५, ७, ११ इत्यादि संख्या सब दृढ हैं और जो ऐसी नहीं हैं सो अदृढ कहाती हैं जैसा ४, ६, ९ इत्यादि ।

१०१ । इस में अपवर्तन के कुछ सिद्धान्त लिखते हैं ।

पहिला सिद्धान्त । जो एक संख्या किसी दूसरी संख्या से निःशेष होती है उस का कोई अपवर्त्य भी उस दूसरी संख्या से निःशेष होगा । अर्थात् किसी (अदृढ) संख्या का अपवर्त्य भी उस संख्या के अपवर्तन से निःशेष होगा ।

जैसा । ८ यह संख्या २ से निःशेष होती है अर्थात् ८ ÷ २ = ४ तब ५६ जो ८ का अपवर्त्य है अर्थात् ५६ = ७ × ८ सो यह ५६ भी २ से निःशेष होगा ।

क्यों कि जब ५६ = ७ × ८ और ८ = ४ × २ इस लिये (४४) वे प्रक्रम के (३) रे सिद्धान्त से ५६ = ७ × ४ × २ इस से स्पष्ट है कि ५६ यह २ से निःशेष होगा ।

दूसरा सिद्धान्त । जो एक संख्या किसी दूसरी संख्या से निःशेष होती हो और उस की लब्धि भी किसी और संख्या से निःशेष होती हो तो यह दूसरी लब्धि और दूसरी संख्या इन दोनों के गुणनफल से वह पहिली संख्या निःशेष होगी ।

जैसा । ५६ यह एक संख्या ७ इस दूसरी संख्या से निःशेष होती है और इस को लब्धि ८ यह भी ४ से निःशेष होती है तब ८ ÷ ४ = २ यह दूसरी लब्धि और ७ यह दूसरी संख्या इन का गुणनफल १४ इस से भी ५६ यह पहिली संख्या निःशेष होगी अर्थात् ५६ ÷ १४ = ४

क्योंकि जब ५६ = ७ × ८ और ८ = २ × ४ इस लिये (४४) वे प्रक्रम के (३) रे सिद्धान्त से ५६ = ७ × २ × ४ इस से स्पष्ट है कि ५६ यह ७ × २ से अर्थात् दूसरी लब्धि २ और दूसरी संख्या ७ इन के गुणनफल से निःशेष होगी ।

तीसरा सिद्धान्त । जो दो संख्या किसी तीसरी संख्या से निःशेष होती हैं उन का योग और अन्तर भी उस तीसरी संख्या से निःशेष होगा ।

जैसा । १२ और २० ये दोनों संख्या ४ से निःशेष होती हैं । तब इन का योग ३२ और अन्तर ८ ये दोनों ४ से निःशेष होंगे ।

क्योंकि जब १२ = ३ × ४ और २० = ५ × ४

तब २० + १२ = ५ × ४ + ३ × ४

और २० − १२ = ५ × ४ − ३ × ४

∴ (४४) वे प्रक्रम के (२) रे सिद्धान्त से और उस के अनुमान से

२० + १२ = (५ + ३) × ४

और २० − १२ = (५ − ३) × ४

इस से इस सिद्धान्त की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

१०२ । अब किस प्रकार की संख्या में कौन अपवर्तन हो सकता है इस का शीघ्र बोध होने के लिये कुछ सिद्धान्त लिखते हैं ।

(१) जिस संख्या के ऊपर एक शून्य होगा वही १० से निःशेष होगी । जिस के ऊपर दो शून्य होंगे वही १०० से, जिस के ऊपर ३ शून्य होंगे वही १००० से यों आगे भी जानो ।

इस की उपपत्ति (४४) वे प्रक्रम के (५) वे सिद्धान्त से स्पष्ट है ।

(२) सिद्धान्त । जिस संख्या के एकस्थान का अङ्क २ से निःशेष होगा अर्थात् जो सम संख्या होगी वही २ से निःशेष होगी ।

जैसा । ३४ इस के एकस्थान का अङ्क २ से निःशेष होता है अर्थात् ३४ यह सम संख्या है तब यह २ से निःशेष होगा ।

क्यों कि ३४ = ३० + ४ और इस में पहिला विभाग ३० यह १० का अपवर्त्य है और १० यह संख्या २ से निःशेष होती है इस लिये (१०१) वे प्रक्रम के (१) ले

सिद्धान्त से ३० यह संख्या भी २ से निःशेष होगी और ४ यह दूसरा विभाग तो २ निःशेष होनेहार. हि माना है इस लिये (१०१) प्र० के (३) रे सिद्धान्त से ३०+४ वा ३४ यह संख्या २ से निःशेष होगी। इस से इस सिद्धान्त की उपपत्ति स्पष्ट है।

(३) सिद्धान्त। जिस संख्या के ऊपर के दो अङ्कों की संख्या ४ से निःशेष होगी वही समग्र संख्या ४ से निःशेष होगी। यों जिस संख्या के ऊपर के तीन अङ्कों की संख्या ८ से निःशेष होगी वही समग्र संख्या ८ से निःशेष होगी। इसी क्रम से आगे भी जानो।

जैसा। ३७५२ इस के ऊपर की ५२ यह दो अङ्कों की संख्या ४ से निःशेष होती है तब ३८५२ यह समग्र संख्या ४ से निःशेष होगी।

क्यों कि ३८५२ = ३८०० + ५२ इस में ३८०० यह पहिला विभाग १०० से निःशेष होता है और १०० यह संख्या ४ से निःशेष होती है। इस लिये ३८०० यह विभाग ४ से निःशेष होगा और ५२ यह दूसरा विभाग भी ४ से निःशेष होता है। इस लिये ३८०० + ५२ अर्थात् ३८५२ यह संख्या ४ से निःशेष होगी।

इसी भांति की युक्ति से तुरंत सिद्ध होता है कि जिस के ऊपर के तीन अङ्कों की संख्या ८ से निःशेष होगी वह समग्र संख्या ८ से निःशेष होगी। इत्यादि।

(४) सिद्धान्त। जिस संख्या के एकस्थान में ० वा ५ होंगे वही संख्या ५ से निःशेष होगी।

क्यों कि जब किसी संख्या के एकस्थान में ० हो तब वह संख्या अवश्य १० से निःशेष होगी और १० यह संख्या ५ का अपवर्त्य है इस लिये वह समग्र संख्या ५ से निःशेष होगी।

इसी भांति जिस के ऊपर का अङ्क ५ है वह भी ५ से निःशेष होगी। जैसा। ३५ यह संख्या ५ से निःशेष होगी। क्यों कि ३५ = ३० + ५ इस से ३० यह ऊपर की युक्ति से ५ से निःशेष होगी और ५ यह ५ से निःशेष होती है। इस लिये (१०१) वे प्रक्रम के (३) रे सिद्धान्त से ३० + ५ अर्थात् ३५ यह संख्या ५ से निःशेष होगी यह सिद्ध हुआ।

(५) सिद्धान्त। जिस संख्या के सब अङ्कों का योग ३ वा ९ से निःशेष होगा वही संख्या ३ वा ९ से निःशेष होगी।

इस की उपपत्ति। किसी संख्या के सब अङ्कों का योग जो ३ से निःशेष होगा तो उस योग में ९ का भाग देने से ०, ३ वा ६ यही शेष रहेगा यह स्पष्ट है और (८०) वे प्रक्रम के (१) अनुमान से यह सिद्ध है कि उस योग में ९ का भाग देने से जो शेष बचेगा वही उस संख्या में भी ९ का भाग देने से शेष बचेगा। अब जिस

संख्या के सब अङ्कों का योग ३ से निःशेष होता है उस के ऐसे दो विभाग करो कि एक विभाग ९ से निःशेष हो और दूसरा ०, ३ और ६ इन में से कोई एक हो। तब पहिला विभाग जो ९ से निःशेष होता है वह अवश्य हि ३ से निःशेष होगा और दूसरा ०, ३ और ६ इन में से कोई एक है वह भी ३ से निःशेष होगा। इस लिये (१०१) वे प्रक्रम के (३) रे सिद्धान्त से स्पष्ट है कि उन दो विभागों का योग जो वह संख्या है सो भी ३ से निःशेष होगी। यह सिद्ध हुआ।

९ से निःशेष होने की उपपत्ति के लिये (८०) वे प्रक्रम का (२) रा अनुमान देखो।

(६) सिद्धान्त। जिस संख्या के विषमस्थान के अङ्कों का योग समस्थान के अङ्कों के योग के समान हो अथवा ११ से तष्ट किये हुए वे दोनों योग परस्पर समान हों वही संख्या ११ से निःशेष होगी।

इस की युक्ति के लिये (८४) वां प्रक्रम और उस का अनुमान देखो।

(७) सिद्धान्त। जिस छ अङ्कों की संख्या में पहिले तीन अङ्क क्रम से उन के उत्तर तीन अङ्कों के समान हों वह संख्या ७, ११ और १३ इन तीनों से निःशेष होगी।

जैसा। ३७२३७२ इस संख्या में पहिले तीन अङ्क ३, ७, २ क्रम से उत्तर तीन अङ्कों के समान हैं। इस लिये ३७२३७२ यह संख्या ७, ११ और १३ इन तीनों से निःशेष होगी।

इस की उपपत्ति।

जब कि ७ × ११ × १३ = १००१ इस लिये १००१ यह संख्या ७, ११ और १३ इन तीनों से निःशेष होगी और इस को जो किसी तीन अङ्कों की संख्या से जैसा ३७२ इस संख्या से गुण देओ तो ३७२३७२ यह गुणनफल भी (१०१) वे प्रक्रम के (१) ले सिद्धान्त के अनुसार ७, ११ और १३ इन तीनों से निःशेष होगा। इस से इस सिद्धान्त की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

अनुमान। जो पांच अङ्कों की संख्या ऐसी हो कि उस के आदि में जो दो अङ्क हैं वेही क्रम से अन्त में हों और बीच में शून्य हो जैसी ५८०५८ तो यह भी संख्या ७, ११ और १३ इन तीनों से निःशेष होगी।

इस की युक्ति अति स्पष्ट है। क्योंकि जब १००१ इस संख्या को किसी दो अङ्कों की संख्या से जैसा ५८ से गुण देओ तो ५८०५८ यह गुणनफल अवश्य ७, ११ और १३ इन तीनों से निःशेष होगा।

इसी युक्ति से यह भी तुरंत सिद्ध होता है कि जिस चार अङ्कों की संख्या के आदि और अन्त में समान अङ्क हों और बीच में दोनों शून्य हों वह संख्या भी ७, ११ और १३ इन तीनों से निःशेष होगी।

इसी भांति १००१ इस को अनेक प्रकार की संख्याओं से गुण देने से ७, ११ और १३ इन तीनों के अनेक प्रकार के अपवर्त्य सिद्ध होंगे ।

(८) सिद्धान्त । जिस आठ अङ्कों की संख्या में पहिले चार अङ्क क्रम से उत्तर चार अङ्कों के समान हों वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी ।

इस सिद्धान्त की उपपत्ति ऊपर के (७) वे सिद्धान्त के उपपत्ति के ऐसी हि है सो ऐसी । जब कि १३७ × ७३ = १०००१ तब इस को किसी चार अङ्कों की संख्या से जैसा ४६६७ से गुण देओ तब ४६६७४६६७ यह गुणनफल ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगा । यह सिद्ध हुआ ।

अनुमान । इसी युक्ति से यह तुरंत सिद्ध होगा कि जो सात अङ्कों की संख्या ऐसी हो कि उस के आदि के तीन अङ्क क्रम से अन्त के तीन अङ्कों के समान हों और बीच में शून्य हो जैसी ५८४०५८४ तो यह संख्या ७३ से और १३७ से भी निःशेष होगी । और जिस छ अङ्कों की संख्या में आदि के दो अङ्क क्रम से अन्त के दो अङ्क हों और बीच में दो शून्य हों जैसी ९७००९७ यह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी । और भी जिस पांच अङ्कों की संख्या के आदि और अन्त में समान अङ्क हों और बीच में तीन शून्य हों वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी ।

(९) सिद्धान्त । जिस चार वा पांच अङ्कों की संख्या में ऊपर की दो अङ्कों की संख्या से पीछे की शेष संख्या दूनी हो जैसी ५६२८ वा १८६९३ यह संख्या ६७ से निःशेष होगी ।

इस की युक्ति । जब कि ६७ × ३ = २०१ तब इस को किसी दो अङ्कों की संख्या से गुण देओ तो स्पष्ट है कि गुणनफल में ऊपर की दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या दूनी होगी । और २०१ यह संख्या ६७ से निःशेष होती है इसलिये इस का अपवर्त्य जो वह गुणनफल सो भी ६७ से निःशेष होगा । यह सिद्ध हुआ ।

इसी युक्ति की सदृश युक्ति से नीचें लिखे हुए सिद्धान्त तुरन्त सिद्ध हो सकते हैं ।

जिस संख्या के ऊपर के दो अङ्कों की संख्या से पीछे की शेष संख्या तिगुनी हो वह संख्या ७ और ४३ इन दोनों से निःशेष होगी ।

जिस संख्या में ऊपर के दो अङ्कों की संख्या से पीछे की शेष संख्या पांचगुनी हो वह संख्या १६७ से निःशेष होगी ।

जिस संख्या में ऊपर के दो अङ्कों की संख्या से पीछे की शेष संख्या आठगुनी हो वह संख्या ८९ से निःशेष होगी ।

जिस संख्या में ऊपर के दो अङ्कों की संख्या से पीछे की शेष संख्या नौगुनी हो वह संख्या १७ और ५३ इन दोनों से निःशेष होगी ।

जिस संख्या में ऊपर के तीन अङ्कों की संख्या से पीछे की शेष संख्या दूनी हो वह संख्या २३ और २९ इन दोनों से निःशेष होगी ।

इत्यादि अनेक सिद्धान्त बनते हैं ।

(१०) सिद्धान्त । जो संख्या अपने निरग्रमूल से छोटी किसी संख्या से निःशेष न होगी वह संख्या दृढ़ होगी अर्थात् वह १ छोड़ और किसी संख्या से निःशेष न होगी ।

जैसा । ८३ का निरग्रमूल ९ है और ९ से छोटी किसी संख्या से ८३ यह निःशेष नहीं होती तब जानो कि ८३ यह दृढ़ संख्या है ।

इस की उपपत्ति ।

भागहार में भाजक और लब्धि इन का गुणनफल भाज्य के समान होता है यह (५७) वे प्रक्रम में सिद्ध किया है और यह भी स्पष्ट है कि जो भाज्य एकरूप बना रहे तो भाजक की संख्या ज्यों २ छोटी होगी त्यों २ लब्धि की संख्या बढ़ेगी और ज्यों २ भाजक की संख्या बढ़ेगी त्यों २ लब्धि की संख्या छोटी होगी क्योंकि जो ऐसा न हो तो उन का गुणनफल उस भाज्य के समान क्योंकर होगा । और जब कि किसी संख्या के निरग्रमूल का उस संख्या में भाग देओ तो लब्धि निरग्रमूल के समान आवेगी और कुछ शेष बचेगा । इस लिये किसी संख्या के निरग्रमूल से छोटे जितने उस संख्या के अपवर्तन होंगे उन का अलग २ उस संख्या में भाग देओ तो जितने उस संख्या के निरग्रमूल से बड़े अपवर्तन होंगे वे सब क्रम से लब्धि होंगे । इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि जिस संख्या को उस के निरग्रमूल से छोटा कोइ अपवर्तन न होगा उस का निरग्रमूल से बड़ा भी कोइ अपवर्तन न होगा अर्थात् उस का कोइ अपवर्तन न होगा इसी लिये वह संख्या दृढ़ होगी । यह सिद्ध हुआ ।

अनुमान १ । इस प्रक्रम में पहिले जो ९ सिद्धान्त लिखे हैं उन की सहायता से जिस संख्या का अपवर्तन न ठहरेगा उस का कोइ अपवर्तन है वा वह संख्या दृढ़ है इस के जानने के लिये यह (१०) वां सिद्धान्त अत्यन्त उपयोगी है ।

उदा० (१) ७९९ इस संख्या का अपवर्तन क्या है?

यहां पहिले ६ सिद्धान्तों से ७९९ इस का कोइ अपवर्तन उपस्थित नहीं होता इस लिये अब खोजना चाहिये कि ७९९ इसका निरग्रमूल जो २८ है उस से छोटी किसी संख्या से ७९९ यह निःशेष होती है वा नहीं? इस बिचार में पहिले यह स्पष्ट है कि जब ७९९ यह संख्या विषम है तब यह २८ से छोटी किसी सम संख्या से निःशेष न होगी। अब विषम संख्याओं में ३, ५, ६ और ११ इन में से भी किसी संख्या से निःशेष न होगी यह ऊपर के सिद्धान्तों से स्पष्ट होता है। तव ७, १३, १७, १९ इत्यादि संख्याओं का ७९९ इस में भाग देके देखने से ज्ञात होता है कि ७९९ संख्या १७ से निःशेष होती है और ४७ लब्धि आती है। इस प्रकार से यह जाना जाता है कि ७९९ इस संख्या के १७ और ४७ ये दो अपवर्तन हैं। इस लिये ७९९ यह संख्या दृढ नहीं है।

उदा० (२) १२४७ इस संख्या का अपवर्तन क्या है?

यहां ऊपर के प्रकार से खोजने से तुरन्त बूझ पड़ता है कि १२४७ इस संख्या के २९ और ४३ ये दो अपवर्तन है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) यह सिद्ध करो कि ये नीचे लिखी हुई संख्या सब दृढ़ हैं। ३१७, ३७९, ४१९, ५६९, ५८७, ६१३, ६९१, ७५७, ८०९, ८८१, ९४७, ९५३, १३४७, १४५३, २६४७, ३४१३, ५०८१, ७१२९, ६२८६१, और ८६१३१।

(२) यह सिद्ध करो कि ये नीचे लिखी हुई संख्या सब अदृढ़ हैं। २०३, २२१, २४७, २९९, ३०१, ३२३, ३२९, ३७७, ३९१, ४३७, ४५१, ४९३, ५२७, ५५१, ६६७, ७८१, १२६७, १६६३, २४८६, २०३७७, २९८०१, ३४५२९, ५९३१७, ६५०४७, ७२१४३, ७९२४७, ८२४२३, ९७६२७, और ९८०२९।

(३) ये नीचे लिखी हुई संख्या दृढ़ हैं वा अदृढ़ हैं सो कहो। ११६३, १२३१; १३०१, १३७३, १४४७, १५२३, १६०१, १६८१, १७६३, २५६१, २६९३, २७९७, २९०३ ३०११, ३१२१, ३२३३, ३३४७, ३४६३, ३५८१, और ३७०१।

अनुमान २। इस प्रक्रम से और ऊपर के अनुमान से हर एक अदृढ़ संख्या के ऐसे अवयवों को अलग कर सकते हैं कि जो प्रत्येक दृढ़ हों और उन का गुणनफल उस अदृढ़ संख्या के तुल्य हो। इन दृढ़ गुण्य-गुणकरूप अवयवों को उस अदृढ़ संख्या के खण्ड कहते हैं।

जिस अदृढ़ संख्या के खण्ड करने हों उस के इस प्रक्रम से ऐसे गु-ण्यगुणकरूप दो अवयव करो कि उन में एक अवयव दृढ़ हो फिर दूसरे अवयव के भी इसी भांति और दो अवयव करो इसी प्रकार से आगे भी करो फिर अन्त के अवयव में जो किसी दृढ़ अवयव को

शीघ्र उपस्थिति न हो तो ऊपर के अनुमान से जानो कि वह अन्त का अवयव दृढ़ है वा अदृढ़ है जो अदृढ़ हो तो उस अनुमान से उस के भी दृढ़ अवयवों को अलग करो । इस प्रकार से हर एक अदृढ़ संख्या के खण्ड होंगे ।

उदा० (१) ५०६२२ इस संख्या के खण्ड करो ।

यहां ५०६२२ यह संख्या सम है इस लिये २ से निःशेष होगी

∴ ५०६२२ = २ × २५३११ ।

अब २५३११ इस के सब अङ्कों का योग ३ से निःशेष होता है

∴ २५३११ = ३ × ८४३७

और ८४३७ इस के विषम स्थान के अङ्कों का योग समस्थान के अङ्कों के योग के समान है

∴ ८४३७ = ११ × ७६७ और (१०) वे सिद्धान्त से ७६७ = १३ × ५९

∴ ५०६२२ = २ × २५३११
= २ × ३ × ८४३७
= २ × ३ × ११ × ७६७
= २ × ३ × ११ × १३ × ५९
यों खण्ड अलग हुए ।

उदा० (२) २८५५८५३ इस संख्या के खण्ड करो ।

यहां २८५५८५३ = ९ × ३१७३१७ सि॰ (५)
= ९ × ७ × ११ × १३ × ३१७ सि॰ (७)

अथवा = ३ × ३ × ७ × ११ × १३ × ३१७
यों खण्ड अलग हुए ।

१०३ । इस अध्याय में अभिन्न संख्याओं के संकलन, व्यवकलन, गुणन, भागहार, घातक्रिया और मूलक्रिया ये छ गणित प्रकार दिखलाए हैं इन को छ परिकर्म कहते हैं इन में उद्दिष्ट संख्या से जो योग, अन्तर इत्यादि रूप फल सिद्ध होगा उस फल पर से जो उस उद्दिष्ट संख्या को जानने चाहो तो उस के जानने के प्रकार को व्यस्त विधि वा विलोम विधि कहते हैं । जैसा । किसी उद्दिष्ट संख्या में दूसरी संख्या को जोड देने से जो योगरूप फल बनता है उस योग में उस दूसरी को घटा देने से अन्तर वह उद्दिष्ट संख्या होगी यह (३१) वे प्रक्रम से अति स्पष्ट है । इसी भांति किसी उद्दिष्ट संख्या में दूसरी संख्या को घटा देने से जो अन्तररूप फल सिद्ध होता है उसी

अन्तर में जो उस दूसरी संख्या को जोड़ देओ तो योग वह उद्दिष्ट संख्या होगी। और किसी उद्दिष्ट संख्या को दूसरी संख्या से गुण देने से जो गुणनफल सिद्ध होता है इसी गुणनफल में जो उस दूसरी संख्या का भाग देओ तो लब्धि वह उद्दिष्ट संख्या होगी प्र०(५८)। इसी भांति किसी उद्दिष्ट संख्या में दूसरी संख्या का भाग देने से जो भजनफल वा लब्धि सिद्ध होगी उसी लब्धि को जो उस दूसरी संख्या से गुण देओ तो गुणनफल वह उद्दिष्ट संख्या होगी। और भी किसी उद्दिष्ट संख्या का जो वर्गादिघातरूप फल होगा उस फल का जो वर्गादि मूल है सो उद्दिष्ट संख्या होगी। इसी भांति किसी उद्दिष्ट संख्या का जो वर्गादिमूलरूप फल होगा उस फल का वर्गादिघात यह उद्दिष्ट संख्या होगी। इस प्रकार से यह सब विलोम विधि कहलाता है। अब इस प्रक्रम में इस विलोम विधि के कुछ उदाहरण दिखला के और सब परिकर्मों के साधारण कुछ प्रश्न लिख के इस अध्याय को समाप्त करते हैं।

उदा० (१) वह संख्या क्या है जिस में १७ जोड़ देने से योग ३५ होता है?
यहां विलोम विधि से ३५ − १७ = १८ यह अभीष्ट संख्या है।

उदा० (२) वह संख्या क्या है जिस में २५ घटा देओ तो शेष ३८ बचता है?
यहां विलोम विधि से ३८ + २५ = ६३ यह अभीष्ट संख्या है।

उदा० (३) जिस संख्या को १३ से गुण देओ तो गुणनफल ९७५ होता है वह संख्या क्या है?
यहां विलोम विधि से ९७५ ÷ १३ = ७५ यह अभीष्ट संख्या है।

उदा० (४) जिस संख्या में १६ का भाग देओ तो लब्धि ८७ आती है वह संख्या क्या है?
विलोम विधि से ८७ × १६ = १३९२ यह अभीष्ट संख्या है।

उदा० (५) जिस संख्या का वर्ग २०२५ है वह संख्या क्या है?
विलोम विधि से $\sqrt{२०२५}$ = ४५ यह अभीष्ट संख्या है।

उदा० (६) वह संख्या क्या है जिस का वर्गमूल ३१७ है?
विलोम विधि से $(३१७)^२$ = १००४८९।

उदा० (७) वह संख्या क्या है जिस को ६ से गुण के फल में ७ जोड़ के योग में १७ का भाग देओ तो लब्धि ५ आती है।

पहिले ५ × १७ = ८५ यहां संख्या का × ६, + ७, ÷ १७ और अंत का फल ५ है। इस लिये फिर विलोम विधि से ८५ − ७ = ७८
और ७८ ÷ ६ = १३ यही अभीष्ट संख्या है।

उदा० (८) वह संख्या क्या है जिस को ५ से गुण के १ घटा देओ और शेष के वर्गमूल में ४ जोड के योग में ८ का भाग देओ तो २ लब्धि आती है?

यहां ×५, −१, $\sqrt{}$ शेष, +४ ÷८ और अन्त का फल २ है

∴ विलोम विधि से २ × ८ = १६, १६ − ४ = १२, $(१२)^२$ = १४४. १४४ + १ = १४५

और १४५ ÷ ५ = २९ यह अभीष्ट संख्या है ।

अथवा इस को यों लिखते हैं ।

$$\frac{(२ \times ८ - ४)^२ + १}{५} = \frac{(१६ - ४)^२ + १}{५} = \frac{(१२)^२ + १}{५} = \frac{१४४ + १}{५} = \frac{१४५}{५} = २९ ।$$

उदा० (९) जिस संख्या के वर्ग को १२६ से गुण के गुणनफल में १ जोड़ देओ तो योग का वर्गमूल ४४९ होता है वह संख्या क्या है सो कहो ।

यहां संख्या के वर्ग का ×१२६, +१, $\sqrt{}$ योग और अन्त का फल ४४९ है

∴ विलोम विधि से

$(४४९)^२$ = २०१६०१, २०१६०१ − १ = २०१६००, २०१६०० ÷ १२६ = १६००

और $\sqrt{१६००}$ = ४० यह अभीष्ट संख्या है .

अथवा $\sqrt{\{(४४९)^२ - १\} \div १२६} = \sqrt{(२०१६०१ - १) \div १२६}$

$= \sqrt{२०१६०० \div १२६} = \sqrt{१६००}$ = ४० यही अभीष्ट संख्या है ।

उदा० (१०) एक मनुष्य कुछ रुपये ले के जुआ खेलनें बैठा । वह पहिले हि अपने धन का आधा हार गया फिर ३ रुपये जीता । तब जितना धन उस के पास हुआ उस का आधा फिर हार गया फिर और ३ रुपये जीता । फिर उस के पास जितना धन हुआ उस का और आधा हार गया फिर और ३ रुपये जीता तब उस के पास ९ रुपये हुए । तो वह पहिले कितने रुपये ले के जुआ खेलने बैठा सो कहो ।

यहां ÷२, +३, ÷२, +३, ÷२, +३ और अन्त में फल ९ है

∴ विलोम विधि से ९ − ३ = ६, ६ × २ = १२, १२ − ३ = ९, ९ × २ = १८,

१८ − ३ = १५ और १५ × २ = ३०

इस लिये प्रारम्भ में ३० रुपये ले के वह मनुष्य जुआ खेलने बैठा ।

और साधारण उदाहरण ।

उदा० (११) एक मनुष्य अपने खंचिये में १०० फल लेके बेंचने के लिये हाट में बैठा उसने उन में से पैसे के ७ फल के भाव से १२ पैसे के फल बेंच डाले तब कहो उस के खंचिये में कितने फल शेष बचे?

यहां पैसे के ७ के भाव से १२ पैसे के १२ × ७ = ८४ फल होंगे यह स्पष्ट हि है

इस लिये १०० − ८४ = १६ इतने फन शेष बचे । यह उत्तर ।

उदा० (१२) जो एक काम ७ मनुष्य ३ दिन में बनाते हैं वह पूरा काम १ मनुष्य कितने दिन में बनावेगा?

यहां स्पष्ट है कि जो काम ७ मनुष्य ३ दिन में बनाते हैं वह ७ × ३ अर्थात् २१ मनुष्यों का एक दिन का काम है इस लिये १ मनुष्य उतना काम २१ दिन में पूरा करेगा यों यह केवल गुणन का उदाहरण है ।

उदा० (१३) एक कुण्ड में पानी आने के लिये तीन झरने थे । उन में हर एक झरना अलग २ खोल देने से साठ २ घड़ी में सब कुण्ड पानी से भर जाता है तब जो तीनों झरने एक हि काल में खोल दिये जावें तो कितने घड़ी में वह कुण्ड भर जायगा ?

यहां स्पष्ट है कि ६० ÷ ३ = २० अर्थात् २० घड़ी में वह कुण्ड भर जायगा ।
यों यह केवल भागहार का उदाहरण है ।

अभ्यास के लिये साधारण प्रश्न ।

(१) २१६ को ७३ से गुण देओ और ५०३ को ३५ से गुण देओ । उन दोनों गुणनफलों का योग और अन्तर कहो ।

उत्तर, योग = ३३५६२ और अन्तर = १६१९८ ।

(२) ७२५ में जो २६ बार और वही संख्या जोड़ दिई जावे तो फल क्या होगा ?

उत्तर, २१७५० ।

(३) ४६७ और ३७६ इन दो संख्याओं का योग और अन्तर और उन्ही दो संख्याओं के वर्गों का योग और अन्तर क्या होगा ?

उत्तर, योग = ८४६, अन्तर = ८८, वर्गों का योग = ३६१७३० और वर्गों का अन्तर = ७४४४८ ।

(४) एक मनुष्य का वय जब १६ बरस का हुआ तब उस को एक लड़की हुई फिर उस के अनन्तर ५ बरस पर एक लड़का हुआ । वह लड़का जब २७ बरस का हुआ तब उस मनुष्य का वय कितना हुआ सो कहो ।

उत्तर, ५१ ।

(५) एक मनुष्य को प्रति वर्ष में ३८७५ रुपये प्राप्ति थी और २९५० रुपये हर वर्ष में वह व्यय करता था तब इस प्रकार से १३ वर्ष में उस के पास कितने रुपये संग्रह हुआ सो कहो ।

उत्तर, १२०२५ रुपये ।

(६) २७३५ – (६७५३ – ५२०८) + ८६४ इस का मान क्या है ?

उत्तर, २०८४ ।

(७) (३७४ – २६६) × ३६ – (५२४ – ४६६) × १७ इस का मान क्या है ?

उत्तर, ३६७० ।

(८) (१६६३ + ९४३) × (२३६८ – १७८६) इस का मान क्या है ?

उत्तर, १६८२५७४ ।

(९) (४८७ + २०८) ÷ (७०६ – ५६७) इस का मान क्या है ?

उत्तर, ५ ।

(१०) ३०९५ को ४७५ से गुण देओ और १४६१ को ९८६ से गुण देओ। तब दोनों गुणनफलों का अन्तर क्या होगा सो कहो।

उत्तर, १।

(११) ९८४ और ६१२ इन दो संख्याओं के वर्गों के और घनों के योग में उन संख्याओं के योग का अलग २ भाग देओ तो क्रम से लब्धि क्या होगी?

उत्तर, ६५० और ४२३७९२।

(१२) ९१७ और ४२५ इन दो संख्याओं के वर्गों के और घनों के अन्तर में उन्हीं दो संख्याओं के अन्तर का अलग २ भाग देने से क्या लब्धि होगी?

उत्तर, १३४२ और ४४११२३९।

(१३) $\sqrt{(४९४)^२ + (१९२)^२} \div ५३$ इस का मान क्या होगा?

उत्तर, १०।

(१४) यह सिद्ध करो कि

(१) सम संख्याओं का योग समसंख्या होती है।

(२) विषम संख्याओं के संकलन में जो जोड़ने की संख्याओं की संख्या सम होगी तो योग सम संख्या होगी और जो विषम होगी तो योग विषम संख्या होगी।

(३) दो सम संख्याओं का वा विषम संख्याओं का अन्तर सम संख्या होगी।

(४) दो संख्याओं में जो एक सम हो और एक विषम हो तो उन का योग और अन्तर दोनों विषम संख्या होगी।

(५) गुण्य और गुणक दोनों सम हों तो गुणनफल सम होगा। जो दोनों विषम हों तो गुणनफल विषम होगा और जो एक सम और एक विषम हो तो गुणनफल सम होगा।

(१५) एक मनुष्य कुछ पैसे पास लेके आंब मोल लेने के लिये हाट में गया। वहां उस ने पहिले ८ पैसे के आंब मोल लिये। तब जितने पैसे उस के पास शेष बचे उतने हि पैसे और दूसरे से उधार ले के फिर ८ पैसे के आंब और मोल लिये। फिर जितने पैसे उस के पास शेष रहे उतने हि और दूसरे से उधार ले के और ८ पैसे के आंब मोल लिये फिर उस के पास जितने पैसे बचे उतने और उधार लेके ८ पैसे के और आंब मोल लिये तब उस के पास शेष कुछ नहीं रहा तब कहो वह पहिले कितने पैसे ले के हाट में गया?

उत्तर, १५ पैसे।

(१६) यह सिद्ध करो कि ४५६५४८६०२७७६१ और १०६१६५२२६३५२० इन दो संख्याओं के योग का वर्गमूल २३७२१५९ यह है और उन्हीं संख्याओं के वर्गयोग के वर्गमूल का वर्गमूल २१६५०१७ यह होता है।

अध्याय २

इस में संख्याओं का महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य ये दो प्रकरण हैं ।

१ महत्तमापवर्तन ।

१०४ । जो दो वा बहुत संख्या जितनी संख्याओं की अपवर्त्य हैं अर्थात् जितनी संख्याओं से निःशेष होती हैं उतनी उन दो वा बहुत संख्याओं का साधारण अपवर्तन कहलाती हैं और उन अपवर्तनों में जो सब से बड़ी संख्या है उस को उन दो वा बहुत संख्याओं का महत्तमापवर्तन कहते हैं ।

जैसा । १२ और १८ इन के २, ३ और ६ इतने साधारण अपवर्तन हैं । इन में ६ यह सब से बड़ा है इस लिये ६ यह १२ और १८ इन का महत्तमापवर्तन है ।

इस भांति ८, १६ और ३२ इन के २, ४ और ८ इतने साधारण अपवर्तन हैं इन में बड़ा ८ है यही ८, १६ और ३२ इन का महत्तमापवर्तन है ।

१०५ । जिन दो संख्याओं का १ छोड़ और कोई साधारण अपवर्तन नहीं है वे परस्पर दृढ कहलाती हैं । जैसा ४ और ९ ये दो संख्या यद्यपि आप दृढ नहीं हैं तोभी इन दोनों का साधारण अपवर्तन १ छोड़ और कोई नहीं हैं इस लिये ये परस्पर दृढ कहाती हैं ।

जिन दो संख्याओं का साधारण अपवर्तन होता है वे परस्पर अदृढ कहाती हैं ।

जैसा । २४ और ३० ये दो संख्या परस्पर अदृढ हैं ।

१०६ । कोई दो संख्याओं में उन के महत्तमापवर्तन का भाग देओ तो लब्धि परस्पर दृढ़ होंगी ।

क्योंकि जो वे लब्धि परस्पर दृढ़ न मानो तो उन का अवश्य कोई साधारण अपवर्तन होगा । तब (१०१) प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त के अनुसार उन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन और लब्धिओं का साधारण अपवर्तन इन दोनों के गुणनफल से वे दो संख्या निःशेष होंगी । अर्थात् यह गुणनफल जो महत्तमापवर्तन से बड़ा सिद्ध हुआ है यह उन संख्याओं का एक साधारण अपवर्तन होगा । परंतु यह नहीं हो सकता । क्योंकि संख्याओं का महत्तमापवर्तन वही है जो सब साधारण अपवर्तनों में बड़ा है । तब उस से भी बड़ा कोई अपवर्तन क्योंकर होगा ? इस लिये उन लब्धिओं का १ छोड़ और कोई साधारण अपवर्तन नहीं हो सकता अर्थात् वे लब्धि परस्पर दृढ़ होंगी । यह सिद्ध हुआ ।

१०७। कोई दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन जानने का प्रकार ।

रीति । जिन संख्याओं का महत्तमापवर्तन जानना हो वे उद्दिष्ट संख्या कहावें । अब उद्दिष्ट दो संख्याओं में छोटी का बड़ी में भाग देओ जो शेष बचेगा उस का उस के भाजक में भाग देओ तब जो दूसरा शेष बचेगा उस का फिर उस के भाजक में भाग देओ.यों उद्दिष्ट संख्याओं का परस्पर में भाग देने से जिस शेष से उस का भाजक निःशेष होगा वह शेष उद्दिष्ट संख्याओं का महत्तमापवर्तन है ।

उदा० । ६२४ और १४४३ इन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन क्या है?

यहां उक्त प्रकार से गणित करने से

```
६२४) १४४३ (२
     १२४८
     -----
      १९५) ६२४ (३
           ५८५
           ---
            ३९) १९५ (५
                १९५
                ---
                  ०
```

इस लिये ६२४ और १४४३ इन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन ३९ है ।

इस प्रकार की उपपत्ति ।

ऊपर के उदाहरण में जो अन्त में ३९ और १९५ ये क्रम से भाजक और भाज्य हैं इन का सब से बड़ा अपवर्तन ३९ है । क्योंकि इस से ३९ और १९५ ये दोनों निःशेष होते हैं और ३९ से बड़ा कोई अपवर्तन नहीं हो सकता जिस से ३९ निःशेष होवें यह स्पष्ट है ।

इस लिये १९५ × ३ = ५८५ यह भी ३९ से निःशेष होगी (१०१) प्र० १ सि० ।
और इसी लिये ५८५ + ३९ = ६२४ यह भी ३९ से निःशेष होगी । (१०१) प्र० (३) सि० ।

तब ६२४ × २ = १२४८ यह भी ३९ से निःशेष होगी । (१०१) प्र० (१) सि०
और ∴ १२४८ + १९५ = १४४३ यह भी ३९ से निःशेष होगी । (१०१) प्र० (३) सि० ।

यों सिद्ध हुआ कि ६२४ और १४४३ ये दोनों संख्या ३९ से निःशेष होंगी और उपपत्ति के प्रारम्भ ही में दिखलाया है कि १९५ और ३९ इन अन्त के भाज्य भाजकों का सब से बड़ा अपवर्तन ३९ है तब स्पष्ट है कि ६२४ और १४४३ इन का भी सब से बड़ा अपवर्तन ३९ है अर्थात् अन्त का शेष जो ३९ है यही संख्याओं का महत्तमापवर्तन है यह सिद्ध हुआ ।

अथवा प्रकारान्तर से उपपत्ति ।

जो संख्या ६२४ और १४४३ इन दोनों को निःशेष करेगी
वह ६२४ × २ = १२४८ को भी निःशेष करेगी । (१०१) प्र० (१) सि० ।
और ∴ १४४३ − १२४८ = १९५ को निःशेष करेगी । (१०१) प्र० (३) सि०

और इसीलिये वह संख्या १९५ × ३ = ५८५ इस को निःशेष करेगी । (१०१) प्र० (१) सि० । इस लिये ६२४ – ५८५ = ३९ इस अन्त के शेष को भी वह संख्या निःशेष करेगी (१०१) प्र० (३) सि०

यों सिद्ध हुआ कि जो संख्या ६२४ और १४४३ इन को निःशेष करेगी वही संख्या ३९ इस अन्त के शेष को भी निःशेष करेगी । इस से स्पष्ट है कि उन दो संख्याओं का सब से बड़ा अपवर्तन ३९ यह अन्त का शेष हि होगा और इस से बड़ा नहीं हो सकता । इस लिये अन्त का शेष ३९ यही महत्तमापवर्तन है । यह सिद्ध हुआ ।

अनुमान १ । दो संख्याओं का परस्पर भाग देने में जो हर एक भागहार में भाज्य भाजक रहते हैं उन का भी महत्तमापवर्तन वही होगा जो उन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन है ।

अनुमान २ । दो संख्याओं को जो काइ तीसरी संख्या निःशेष करती हो वह उन दो संख्याओं के महत्तमापवर्तन को भी निःशेष करेगी ।

अनुमान ३ । जो दो संख्या परस्पर दृढ हैं उन को परस्पर भागने से अन्त का शेष १ होगा ।

१०८ । जो कोइ दो संख्याओं का गुणनफल तीसरी संख्या का अपवर्त्य अर्थात् तीसरी से निःशेष होता है और उन दो संख्याओं में एक संख्या तीसरी से दृढ हो तो दूसरी संख्या तीसरी से निःशेष होगी ।

जैसा । ७ और ८ इन का गुणनफल ५६ यह ४ से निःशेष होता है और ७ और ४ ये परस्पर दृढ हैं तो ८ यह संख्या ४ से निःशेष होगी ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि ७ और ४ ये परस्पर दृढ हैं तब जो इन दोनों को ८ से गुण देओ तो स्पष्ट है कि ५६ और ३२ इन दो गुणनफलों का महत्तमापवर्तन ८ हि होगा और ५६ यह ४ का अपवर्त्य माना है और ३२ भी ४ का अपवर्त्य है क्यों कि ४ हि को ८ से गुण देने से बना है । इस लिये जब कि ५६ और ३२ इन दोनों को ४ निःशेष करती है तब वह इन के महत्तमापवर्तन को अर्थात् ८ को निःशेष करेगी (१०७) प्र० (२) अनु० । यह सिद्ध हुआ ।

१०९ । जो दो वा अधिक संख्या प्रत्येक और संख्या से दृढ हैं उन संख्याओं का गुणनफल भी उस और संख्या से दृढ होगा ।

जैसा । ५ और ७ ये दोनो संख्या प्रत्येक ६ से दृढ हैं तो ५ × ७ वा ३५ यह गुणनफल भी ६ से दृढ होगा ।

क्यों कि जो ३५ और ६ इन को परस्पर दृढ न मानो तो अवश्य इन का कोइ

साधारण अपवर्तन होगा जो इन दोनों को निःशेष करे तब ५ और ७ (जो दोनों प्रत्येक ६ से दृढ मानी हैं) ये प्रत्येक ६ के अपवर्तन से भी दृढ होंगी यह स्पष्ट है। अब इस अपवर्तन से ३५ अर्थात् ५ × ७ यह निःशेष होगा और वह ५ से दृढ माना है तो (१०८) प्रक्रम के अनुसार वह अपवर्तन अवश्य ७ को निःशेष करेगा। परंतु ऊपर सिद्ध किया है कि वह ७ से दृढ है तब वह ७ को क्यों कर निःशेष करेगा? यह बाधित हुआ। इस लिये ७ × ५ वा ३५ और ६ इन दोनों का कोई साधारण अपवर्तन नहीं हो सकता अर्थात वे परस्पर दृढ हैं। यह सिद्ध हुआ।

इसी युक्ति से सिद्ध होता है कि जो दो से अधिक भी संख्या प्रत्येक किसी और संख्या से दृढ़ हों तो उन अधिक संख्याओं का गुणनफल भी उस संख्या से दृढ़ होगा।

अनुमान। जो दो संख्या परस्पर दृढ़ हैं उन के वर्ग, घन आदि घात भी परस्पर दृढ़ होंगे।

जैसा। ४ और ५ परस्पर दृढ़ हैं तो १६ और २५ भी परस्पर दृढ़ होंगे।

क्यों कि जो ४ यह ५ और ५ इन दोनों से दृढ़ है तो वह ५ × ५ से अर्थात् २५ से भी दृढ़ होगा। फिर जो २५ यह ४ और ४ इन दोनों से दृढ़ है तो वह ४ × ४ से अर्थात् १६ से भी दृढ़ होगा। यों सिद्ध हुआ कि १६ और २५ ये परस्पर दृढ़ हैं।

इसी युक्ति से यह सिद्ध होता है कि जो दो संख्या परस्पर दृढ़ हैं उन के घन, चतुर्घात इत्यादि घात भी परस्पर दृढ़ होंगे।

११०। दो संख्याओं में पहिली संख्या को ऐसी एक तीसरी संख्या से गुण देओ वा भाग देओ जो तीसरी संख्या दूसरी से दृढ़ हो तो वह गुणी वा भागी हुई पहिली संख्या और केवल दूसरी संख्या इन दोनों का महत्तमापवर्तन वही होगा जो केवल पहिली और दूसरी संख्या का महत्तमापवर्तन है।

जैसा। १२ और ६ ये दो संख्या हैं और २ यह तीसरी संख्या ६ इस दूसरी संख्या से दृढ़ है तब १२ × २ वा २४ और ६ इन का महत्तमापवर्तन वही ३ है जो १२ और ६ इन का महत्तमापवर्तन है।

अथवा २४ और ६ ये दो संख्या हैं और २ यह तीसरी संख्या ६ से दृढ़ है तब २४ ÷ २ वा १२ और ६ इन का महत्तमापर्तन वही ३ है जो २४ और ६ इन का महत्तमापवर्तन है।

इस की उपपत्ति।

जब कि १२ और ६ इन का महतमापवर्तन ३ है इस लिये १२ ÷ ३ = ४ और ६ ÷ ३ = ३ यों ४ और ३ ये परस्पर दृढ़ होंगे और जब कि २ यह तीसरी संख्या ६ से दृढ़ है तब वह ६ के अपवर्तन ३ से भी दृढ़ होगी। इस लिये ४ × २ और ३ ये भी परस्पर दृढ़ होंगे (१०६) प्र॰ और इस लिये ३ × ४ × २ और ३ × ३ अर्थात् २४ और ६ इन का

महत्तमापवर्तन ३ होगा । इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि १२ और ६ इन का जो महत्तमापवर्तन ३ है वही २४ और ६ इन का भी महत्तमापवर्तन होगा और २४ और ६ इन का जो महत्तमापवर्तन हो वही १२ और ६ इन का भी होगा । यह सिद्ध हुआ ।

१११ । इस प्रक्रम में लाघव से महत्तमापवर्तन जानने के कुछ प्रकार लिखते हैं ।

(१) महत्तमापवर्तन निकालने में जो बार २ भागहार करना पड़ता है वह (७५) वे प्रक्रम की रीति से करो तो क्रिया में लाघव होगा ।

उदा० । ११८३ और १६१० इन का महत्तमापवर्तन क्या है ?

```
यहां  ११८३ ) १६१० ( १
            ४२७ ) ११८३ ( २
                  ३२६ ) ४२७ ( १
                         ९८ ) ३२६ ( ३
                              ३५ ) ९८ ( २
                                   २८ ) ३५ ( १
                                         ७ ) २८ ( ४
                                               ०
```

∴ यहां महत्तमापवर्तन ७ है ।

(२) महत्तमापवर्तन जानने के लिये संख्याओं का परस्पर में भाग देने में पूर्व भाजक को भाज्य मान के जो उस को शेष की दहिनी ओर फिर लिखते हैं सो न लिखो उस को जहां का तहां रहने देओ और वहां हि उस में शेष का भाग देओ और नये शेष को उसी के नीचे लिखो । यों हि अन्त तक करो । और परस्पर भजन से जो लब्धि आवेंगी उन को प्रथम लब्धि के सामने एक हि पंक्ति में लिखो वा दो २ लब्धिओं को नीचे २ लिखो । यों करने से क्रिया में बहुत लाघव होगा ।

```
जैसा । ११८३)  १६१० (१, २, १, ३, २, १, ४   यों एक पंक्ति में
        ३२६    ४२७                          सब लब्धि लिखो ।
        ३५     ९८
        ७      २८
               ०

अथवा   ११८३)  १६१० (१, २    यों सब लब्धि लिखो ।
        ३२६    ४२७ (१, ३
        ३५     ९८ (२, १
        ७      २८ (४
               ०
```

∴ महत्तमापवर्तन ७ है ।

(३) जिन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन जानना है उन के किसी साधारण अपवर्तन की जो (१०२) प्रक्रम से शीघ्र उपस्थिति हो तो पहिले उस अपवर्तन से उन दोनों संख्याओं को अपवर्तित करके तब उन अपवर्तित संख्याओं का पूर्व प्रकार से महत्तमापवर्तन जानो और उस को उस पूर्व अपवर्तन से गुण देओ । वह गुणनफल उन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन होगा ।

उदा० (१) ३८७२७ और ८२८३६ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

यहां (१०२) प्रक्रम के (५) वे सिद्धान्त से शीघ्र उपस्थित होता है कि ये दोनों संख्या ९ से निःशेष होंगी । इस लिये पहिले संख्याओं को ९ से अपवर्तित करने से ४३०३ और ९२०४ ये दोनों अपवर्तित संख्या हैं इन का महत्तमापवर्तन जानने के लिये न्यास

४३०३) ९२०४ (२
५९८) ४३०३ (७
११७) ५९८ (५
१३) ११७ (९
०

यों अपवर्तित संख्याओं का महत्तमापवर्तन १३ है इस लिये ३८७२७ और ८२८३६ इन का महत्तमापवर्तन १३ × ९ अर्थात् ११७ है ।

अथवा उद्दिष्ट संख्या ३८७२७ और ८२८३६
९ से अपवर्तित संख्या ४३०३ और २००४
∴ ४३०३) ९२०४ (२, ७, ५, ९
११७) ५९८
० १३

इस लिये १३ × ९ = ११७ यह महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (२) ११९३२ और १५१८० इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

यहां पहिले दोनों संख्याओं को ४ से अपवर्तित करने से २७८३ और ३७९५ ये हुईं फिर इन में ११ का अपवर्तन देने से २५३ और ३४५ ये हुईं ।

∴ २५३) ३४५ (१, २, १, ३
६९ ९२
० २३

यों अपवर्तित संख्याओं का महत्तमापवर्तन २३ है ।

∴ २३ × ४ × ११ = १०१२ यह उद्दिष्ट संख्याओं का महत्तमापवर्तन है ।

इस की उपपत्ति अति स्पष्ट है ।

क्यों कि अपवर्तित संख्याओं का महत्तमापवर्तन भी अपवर्तित होगा । इस लिये उस को उस अपवर्तन से गुण देने से गुणनफल वास्तव महत्तमापवर्तन होगा ।

(४) उद्दिष्ट दो संख्याओं में जो किसी एक हि संख्या का ऐसा अपवर्तन उपस्थित हो कि जो दूसरी संख्या से दृढ़ हो तो उस अपवर्तन से अपवर्तित किई हुई एक संख्या और यथास्थित दूसरी संख्या इन दोनों का महत्तमापवर्तन जानो वही उन उद्दिष्ट संख्याओं का महत्तमापवर्तन होगा । प्र० (११०)

उदा० । ११८३ और १६१० इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

इस प्रक्रम के पहिले दो प्रकारों में जो उदाहरण लिखा है वही यह है । इस में १६१० का १० अपवर्तन है और यह ११८३ से दृढ़ है । इस लिये अपवर्तित संख्या १६१ और यथास्थित संख्या ११८३ इन के महत्तमापवर्तन के लिये

न्यास १६१) ११८३ (७, २, १, ७
४६ ५६
० ७

∴ उद्दिष्ट संख्याओं का महत्तमापवर्तन ७ है ।

११२ । तीन अथवा अधिक संख्याओं का महत्तमापवर्तन जानने का प्रकार ।

पहिले दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन जानो । फिर यह महत्तमापवर्तन और तीसरी संख्या इन दोनों का महत्तमापवर्तन जानो । फिर यह महत्तमापवर्तन और चौथी संख्या इन का महत्तमापवर्तन जानो फिर इसी भांति आगे क्रिया करो । तब अन्त में जो महत्तमापवर्तन होगा वही अभीष्ट महत्तमापवर्तन है ।

उदा० । १८, ३० और ३६ इन का महत्तमापवर्तन क्या है ?

यहां १८) ३० (१
१२) १८ (१
६) १२ (२
०

अथवा लाघव की क्रिया से ।
१८) ३० (१, १, २
६) १२
०

इस लिये १८ और ३० इन का महत्तमापवर्तन ६ है ?

अब ६ और ३६ इन का महत्तमापवर्तन जानना चाहिये ।

सो ऐसा ६) ३६ (६
३) ६ (२
०

अथवा
६) ३६ (६, २
० ३

इस लिये १८, ३० और ३६ इन तीनों संख्याओं का महत्तमापवर्तन ३ है ।

ऊपर के प्रकार की उपपत्ति ।

जो संख्या १८ और ३० इन दोनों को निःशेष करेगी वह इन के महत्तमापवर्तन ६ को भी निःशेष करेगी । (१०७) प्र० (२) अनु०

इसी लिये जो संख्या १८, ३० और ३९ इन तीनों को निःशेष करेगी वह ६ और ३९ को निःशेष करेगी ।

इस लिये ६ और ३९ का जो महत्तमापवर्तन होगा वही १८, ३० और ३९ इन तीनों का भी होगा ।

इसी प्रकार से चार आदि संख्याओं का महत्तमापवर्तन जानने के प्रकार की भी युक्ति जानो ।

अभ्यास के लिये उदाहरण ।

नीचे लिखे उदाहरणों में बांई ओर की उद्दिष्ट संख्या हैं और दहिनी ओर की अन्त की संख्या उन का महत्तमापवर्तन है ।

(१) १२, ८४ । १२
(२) १८, ४२ । ६
(३) ३२, १०४ । ८
(४) २४, १७२ । ४
(५) ३५, ३२२ । ७
(६) ११७, ५९८ । १३
(७) १४३, ३३० । ११
(८) २१६, ४७४ । ६
(९) २२८, ३९९ । ५७
(१०) २३१, ८१९ । २१
(११) ६९७, ८३३ । १७
(१२) ७४१, ८४५ । १३
(१३) ७५९, १०३५ । ६९
(१४) ८१६, १०४४ । १२
(१५) ९३८, १२३२ । १४
(१६) १२६३, १६६५ । ३
(१७) १३१२, ३३६२ । ८२
(१८) ४२०४, ५५२० । ४
(१९) ५३८५, ७९८० । १५
(२०) ५८९४, १३६०८ । १४
(२१) ६५१९, १०८२४ । १२३
(२२) ८८७४, २३९२५ । ८७
(२३) १०६८९, १३४६१ । २१
(२४) ११०३४, ४२५३४ । १८
(२५) ५००८५, ५६४१८ । ३
(२६) १२३४५६, ६५४३२१ । ३
(२७) १८८३५८, २०२७८२ । ६
(२८) ६४९२६४, ६५१३२२ । १४
(२९) ७९२७१८, ८१४१३१ । ४३७
(३०) ३७५७५७२, ४१४३२२३ । २५९
(३१) ३६, ४५, ६० । ३
(३२) ४०, ४८, ६० । ४
(३३) ४२, ७०, १०५ । ७
(३४) ७२, ९०, १२० । ६
(३५) ६०, ८४, १४०, २१० । २
(३६) १६५, २३१, ३८५ । ११
(३७) १२६, १९८, ४६२, ६९३ । ३
(३८) २२४, २८८, ५०४ । ८
(३९) २५२, ३९६, ९२४ । १२
(४०) ५४६, ७१४, १३२६ । ६
(४१) १६८, २६४. ६१६, ९२४ । ४
(४२) ३१५, ४९५, ६९३, ११५५ । ३
(४३) २०१६, २८९८, ५१५२ । १४
(४४) ३९२७, ४३८९, ६७८३ । २१
(४५) ३२११, ४९०१, ७१६३ । १३

प्रश्न । ९ । अ, क और ग इन तीन मनुष्यों ने एक दिन प्रातःकाल से लेके सायंकाल तक एक मन्दिर की कितनी एक सव्य प्रदक्षिणा किईं । उस में तीनों की गति परस्पर समान नहीं थीं परंतु सब एकरूप थीं । जब ठीक सायंकाल में सभों की प्रदक्षिणा पूरी हो गईं और तीनों पूर्व स्थान में एकत्र हुए तब जाना गया कि दिन भर में मार्ग में अ और क परस्पर ४० बार मिले और अ और ग २४ बार मिले । तब कहो कि प्रातःकाल के अनन्तर प्रदक्षिणा के मार्ग में तीनों कितनी बार एकत्र हुए?

उत्तर, ८ बार ।

२ लघुतमापवर्त्य ।

११३ । जो दो वा अधिक संख्या जितनी संख्याओं को प्रत्येक निःशेष करती हैं उतनी संख्या उन दो वा अधिक संख्याओं का साधारण अपवर्त्य कहलाती हैं और उन अपवर्त्यों में जो सब से छोटी संख्या है उस को उन दो वा अधिक संख्याओं का लघुतमापवर्त्य कहते हैं ।

जैसा । २, ३, ४, और ६ इन के १२, २४, ३६ इत्यादि साधारण अपवर्त्य हैं इन में १२ यह सब से छोटी है इस लिये यह उन संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है ।

११४ । कोई दो संख्याओं का उन के लघुतमापवर्त्य में अलग २ भाग देओ तो लब्धि परस्पर दृढ़ होंगी ।

क्यों कि जो ऐसा न हो अर्थात् उन लब्धिओं का कोई साधारण अपवर्तन हो तब (१०१) प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त के अनुसार यह लब्धिओं का साधारण अपवर्तन और वह हर एक संख्या इन के गुणनफल से वह लघुतमापवर्त्य निःशेष होगा । इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि इस साधारण अपवर्तन का जो लघुतमापवर्त्य में भाग देओ तो भजनफल (जो लघुतमापवर्त्य से अवश्य छोटा होगा) उन दो संख्याओं का साधारण अपवर्त्य होगा । परंतु यह असंभाव है क्यों कि संख्याओं का लघुतमापवर्त्य वही है जो उन के साधारण अपवर्त्यों में सब से छोटा है तब उस से भी छोटा उन का साधारण अपवर्त्य क्यों कर होगा? इस लिये उन दो लब्धिओं का १ छोड़ और कोई साधारण अपवर्तन नहीं हो सकता अर्थात् वे लब्धि परस्पर दृढ होंगी यह सिद्ध हुआ ।

११५ । जो दो संख्या परस्पर दृढ़ हैं उन का गुणनफल उन दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है ।

इस की उपपत्ति । मानो कि ८ और १३ इन दो परस्पर दृढ संख्याओं का लघुतमापवर्त्य जानना है तब इन का लघुतमापवर्त्य वह होगा जिस में क्रम से ८ और १३ का अलग २ भाग देने से पहिली और दूसरी लब्धि ये दोनों परस्पर दृढ़ होंगी । प्र० (११४) । अब जब कि ८ और पहिली लब्धि इन का गुणनफल और १३

और दूसरी लब्धि इन का गुणनफल ये दोनों प्रत्येक ८ और १३ के लघुतमापवर्त्य के समान हैं तब १३ और दूसरी लब्धि इन का गुणनफल अवश्य पहिली लब्धि से निःशेष होगा परंतु पहिली लब्धि दूसरी से दृढ़ है इस लिये (१०८) प्रक्रम के अनुसार पहिली लब्धि से १३ निःशेष होंगे । इसी भांति ८ और पहिली लब्धि इन का गुणनफल १३ से निःशेष होगा । परंतु ८ और १३ परस्पर दृढ़ हैं इस लिये १३ से पहिली लब्धि निःशेष होगी । यों १३ और पहिली लब्धि इन दोनों में हर एक दूसरे से निःशेष होता है इस से स्पष्ट है कि १३ और पहिली लब्धि ये दोनों परस्पर समान हैं अर्थात् पहिली लब्धि १३ है और जब कि ८ और पहिली लब्धि इन का गुणनफल लघुतमापवर्त्य है इस लिये ८ और १३ का गुणनफल उन का लघुतमापवर्त्य है। यों सिद्ध हुआ ।

११६ । कोई दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य जानने का प्रकार ।

उद्दिष्ट दो संख्याओं के गुणनफल में उन के महत्तमापवर्तन का भाग देओ जो लब्धि होगी वही उन दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है ।

उदा० । ९६ और १५६ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

यहां पहिले उद्दिष्ट संख्याओं के महत्तमापवर्तन के लिये न्यास

```
९६)१५६(१
    ६०)९६(१
        ३६)६०(१
            २४)३६(१
                १२)२४(२
                     ०
```

अथवा और लाघव से

```
९६) १५६ (१, १,
३६   ६० (१, १,
१२   २४ (२
      ०
```

यों उद्दिष्ट संख्याओं का महत्तमापवर्तन १२ है

तब १५६ × ९६ = १४९७६ और १४९७६ ÷ १२ = १२४८

इस लिये ९६ और १५६ इन का लघुतमापवर्त्य १२४८ है ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि ९६ और १५६ इन उद्दिष्ट संख्याओं में उन के महत्तमापवर्तन का १२ भाग देने से ८ और १३ ये लब्ध हुईं अपवर्तित संख्या (१०५) प्रक्रम के अनुसार अवश्य परस्पर दृढ होंगी तब इन का लघुतमापवर्त्य (११५) प्रक्रम से ८ × १३ होगा । परंतु अपवर्तित संख्याओं का लघुतमापवर्त्य भी अपवर्तित होगा । इस लिये ८ × १३ इस को १२ इस महत्तमापवर्तन से गुण देने से गुणनफल ८ × १३ × १२ यह वास्तव लघुतमापवर्त्य होगा ।

अब ८ × १३ × १२ इस लघुतमापवर्त्य को जो १२ इस महत्तमापवर्तन से गुण के फल में १२ का भाग देओ तो स्पष्ट है कि लघुतमापवर्त्य का मान वही बना रहेगा

इस लिये लघुतमापवर्त्य = ८ × १३ × १२

= १२ × ८ × १३ × १२ ÷ १२

परंतु १२ × ८ = ९६ और १३ × १२ = १५६

∴ लघुतमापवर्त्य = ९६ × १५६ ÷ १२

इस से इस प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

अनुमान । कोइ दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य इन दोनों का गुणनफल उन दो संख्याओं के गुणनफल के समान होता है ।

११७ । तीन वा अधिक संख्याओं का लघुतमापवर्त्य जानने का प्रकार ।

पहिले दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य जानो फिर यह लघुतमापवर्त्य और तीसरी संख्या इन का लघुतमापवर्त्य जानो फिर इसी प्रकार से आगे भी क्रिया करो । तब अन्त में जो लघुतमापवर्त्य होगा वही अभीष्ट लघुतमापवर्त्य है ।

उदा० । ६, २० और २५ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां ६) २० (३
२) ६ (३
०

यों ६ और २० इन का महत्तमापवर्तन २ है ।

∴ ६ × २० ÷ २ = ६० यह ६ और २० का लघुतमापवर्त्य है ।

फिर, ६० और २५ इन का लघुतमापवर्त्य जानने के लिये न्यास

२५) ६० (२
१० (२५ (२
५ (१० (२
०

यों ६० और २५ इन का महत्तमापवर्तन ५ है ।

∴ ६० × २५ ÷ ५ = ३०० यह ६० और २५ का लघुतमापवर्त्य है । इस लिये ६, २० और २५ इन का लघुतमापवर्त्य ३०० है ।

ऊपर के प्रकार की उपपत्ति ।

६ और २० इन का लघुतमापवर्त्य ६० है । इस से जो संख्या निःशेष होगी । वह (१०१) प्रक्रम के (१) ले सिद्धान्त के अनुसार ६ और २० इन से भी निःशेष होगी । इस लिये ६० और २५ इन का जो लघुतमापवर्त्य होगा वही ६, २० और २५ इन का लघुतमापवर्त्य होगा ।

इसी प्रकार से चार आदि संख्याओं का लघुतमापवर्त्य जानने के प्रकार की भी उपपत्ति जानो ।

११८ । जो अनेक संख्या ऐसी हों कि उन में कोइ दो संख्या परस्पर अदृढ न हों उन अनेक संख्याओं का गुणनफल उन का लघुतमापवर्त्य होगा ।

जैसा । ४, ७, ११ और १५ इन चार संख्याओं में कोइ दो संख्या परस्पर अदृढ नहीं हैं । इस लिये ४ × ७ × ११ × १५ = ४६२० यह संख्या ४, ७, ११ और १५ इन का लघुतमापवर्त्य है ।

क्यों कि जब ४ और ७ परस्पर दृढ हैं तब इन का लघुतमापवर्त्य ४ × ७ होगा (११५) प्र० । इस लिये ४ × ७ और ११ ये परस्पर दृढ होंगे प्र० (१०६) इस लिये ४ × ७ × ११ यह ४ × ७ और ११ का लघुतमापवर्त्य होगा प्र० (११५).

∴ ४ × ७ × ११ यह ४, ७ और ११ इन का लघुतमापवर्त्य होगा प्र० (११७)

इसी भांति ४ × ७ × ११ और १५ ये परस्पर दृढ हैं (१०६) प्र०

इस लिये ४ × ७ × ११ × १५ यह ४ × ७ × ११ और १५ इन का लघुतमापवर्त्य है । प्र० (११५)

इसी लिये ४ × ७ × ११ × १५ यह ४, ७, ११ और १५ इन का लघुतमापवर्त्य है । यह सिद्ध हुआ ।

११९ । जो बहुतसी संख्या ऐसी हों कि उन में कितनी एक दो वा अधिक संख्या परस्पर अदृढ हों तो उन २ परस्पर अदृढ संख्याओं को उन के २ अपवर्तन से अपवर्तित करो जिस से कि वे संख्या अन्त में ऐसी हो जावें कि उन में कोइ दो संख्या परस्पर अदृढ न रहें तब इन सब दृढ संख्याओं के गुणनफल को इन अपवर्तनों से गुण देओ । गुणनफल उन बहुत संख्याओं का लघुतमापवर्त्य होगा ।

उदा० । ६, २० और २५ इन का लघुतमापवर्त्य जानना है

तब ६, २० और २५ इन में पहिले पहिली दो संख्याओं में २ का अपवर्तन देने से ३, १० और २५ ये संख्या हुईं फिर इन में दूसरी और तीसरी में ५ का अपवर्त देने से ३, २ और ५ ये सब परस्पर दृढ संख्या बन गईं । अब इन का गुणनफल ३ × २ × ५ = ३० है इस को २ और ५ इन अपवर्तनों से गुण देने से ३० × २ × ५ = ३०० यह गुणनफल ६, २० और २५ इन का लघुतमापवर्त्य है (११७) वे प्रक्रम का उदाहरण देखो ।

इस की उपपत्ति ।

अन्त की सब दृढ संख्याओं का गुणनफल (११८) वे प्रक्रम के अनुसार उन दृढ संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है । परंतु अपवर्तन देके दृढ किईं हुईं संख्याओं का लघुतमापवर्त्य भी अपवर्तित होगा । इस लिये उस लघुतमापवर्त्य को उन अपवर्तनों से गुण देने से गुणनफल अनपवर्तित संख्याओं का अर्थात् उद्दिष्ट संख्याओं का लघुतमापवर्त्य होगा । यह सिद्ध हुआ ।

१२० । जब उद्दिष्ट संख्याओं में (१०२) प्रक्रम की सहायता से कितनी एक दो वा अधिक संख्याओं के साधारण अपवर्तनों की शीघ्र उपस्थिति हो तब उन संख्याओं का लघुतमापवर्त्य जानने के लिये

लाघव की ओर अत्यन्त सुगम यह नीचे लिखी हुई रीति (११९) वे प्रक्रम के आश्रय से उत्पन्न होती है ।

रीति । उद्दिष्ट संख्याओं को एक बेंड़ी पंक्ति में क्रम से लिखो फिर देखो कि २, ३, ५, ७ इत्यादि दृढ संख्याओं में क्रम से किस दृढ़ संख्या से पंक्ति की दो वा अधिक संख्या निःशेष होती हैं उस दृढ़ संख्या को पंक्ति की बांई ओर भाजक स्थान में लिखो और उस से पंक्ति की जो २ संख्या निःशेष होगी उस में भाग देके लब्ध को उस २ संख्या के नीचे लिखो और जो २ उस दृढ़ संख्या से निःशेष न होगी उस को भी उस २ संख्या के नीचे लिखो । यों नवीन एक पंक्ति उत्पन्न होगी उस में भी फिर इसी प्रकार की क्रिया करो । और ऐसी बार २ तब तक क्रिया करो जब तक अन्त की पंक्ति में ऐसी सब संख्या हो जावें कि उन में कोइ दो संख्या परस्पर अदृढ़ न रहें तब वे भाजक-रूप दृढ़ संख्या और अन्त की पंक्ति की संख्या इन सभों का गुणनफल करो । वह उन उद्दिष्ट संख्याओं का लघुतमापवर्त्य होगा ।

उदा० (१) । १२, १५, १६ और १८ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां					
	२)	१२,	१५,	१६,	१८ ।
	२)	६,	१५,	८,	९ ।
	३)	३,	१५,	४,	९ ।
		१,	५,	४,	३ ।

इस लिये २ × २ × ३ × ५ × ४ × ३ = ७२० यह उद्दिष्ट संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है ।

उदा० (२) । २ से लेके १० तक क्रम से संख्याओं का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां										
	२)	२,	३,	४,	५,	६,	७,	८,	९,	१० ।
	२)	१,	३,	२,	५,	३,	७,	४,	९,	५ ।
	३)	१,	३,	१,	५,	३,	७,	२,	९,	५ ।
	५)	१,	१,	१,	५,	१,	७,	२,	३,	५ ।
		१,	१,	१,	१,	१,	७,	२,	३,	१ ।

∴ २ × २ × ३ × ५ × ७ × २ × ३ = २५२० यह लघुतमापवर्त्य है ।

अथवा इस में हर एक पंक्ति में जो २ संख्या किसी और संख्या की अपवर्तन हो उस २ अपवर्तन की संख्या के नीचे छोटी रेखा करो और उस को छेकी हुई समझो और शेष संख्याओं में आगे उक्त प्रकार से

क्रिया करके लघुतमापवर्त्य निकालो वही अभीष्ट लघुतमापवर्त्य होगा। इस से क्रिया में बहुत लाघव होगा।

जैसा ऊपर के उदाहरण में

२) २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०

३, ७, ४, ९, ५

∴ २ × ७ × ४ × ९ × ५ = २५२० यह लघुतमापवर्त्य है।

अभ्यास के लिये उदाहरण।

नीचे लिखे हुए उदाहरणों में बांई ओर की उद्दिष्ट संख्या हैं और दहिनी ओर की अन्त की संख्या उन का लघुतमापवर्त्य है।

(१) ७, १४ । १४

(२) १८, २७ । ५४

(३) २०, ३५ । १४०

(४) ८, १३ । १०४

(५) २४, ४० । १२०

(६) ३६, ९९ । ३९६

(७) ७८, १०२ । १३२६

(८) १२८, १४६ । ९३४४

(९) ५४०, ७७४ । २३२२०

(१०) १०५३, १६७७ । ४५२७९

(११) २५९४, ३८९१ । ७७८२

(१२) २९६१, ७८९६ । २३६८८

(१३) ५८२९, ७९१७ । ५३०४३३९

(१४) ७८९१, १३९६१ । १८१४९३

(१५) ४९२७०, ६६९११ । २५३५९२६९०

---

(१६) ६, ८, १२ । २४

(१७) ७, ९, ११ । ६९३

(१८) १२, १५, २० । ६०

(१९) २०, २४, ३० । १२०

(२०) ३०, ३५, ४२ । २१०

(२१) ४२, ४८, ५६ । ३३६

(२९) ५६, ६३, ७२ । ५०४

(२३) ८४, ९१, १५६ । १०९२

(२४) ८८, ११२, १५४ । १२३२

(२५) ९०, १३५, १५० । १३५०

(२६) १५४, १८७, २३८ । २६१८

(२७) १६५, २०९, २८५ । ३१३५

(२८) १९५, २२१, २५५ । ३३१५

(२९) २०८, २४७, ३०४ । ३९५२

(३०) ६, ७, ८, ९ । ५०४

(३१) १२, १४, १५, १६, १८ । ५०४०

(३२) ३०, ४२, ७०, १०५ । २१०

(३३) १२०, १४४, १८०, २४०, ३६० । ७२०

(३४) ६, १४, २१, २२, ३३, ७७ । ४६२

(३५) २१, २२, २३, २४, २५, २६, २७, २८, २९, ३० । ३६०५४०१८००

(३६) १८०१८, ३७०३७, ५१२८२, ६०६०६, ९५२३८ । ९९९९९९

महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य के साधारण प्रश्न।

(१) जिन दो संख्याओं का गुणनफल १७६४ और महत्तमापवर्तन ७ है उन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां (११६) प्रक्रम से १७६४ ÷ ७ = २५२ यह दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है।

(२) जिन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तन २१ और लघुतमापवर्त्य ४२० है और उन दो संख्याओं में एक संख्या ८४ है तब कहो दूसरी संख्या क्या होगी?

यहां (११६) प्रक्रम के अनुमान से महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य इन का गुणनफल = २१ × ४२० = ८८२० यह उन दो संख्याओं का गुणनफल है इस लिये ८८२० ÷ ८४ = १०५ यह दूसरी संख्या है।

(३) एक कुंजड़े के टोकरी में कुछ फल रखे थे। जब वह उन में से चार २, वा पांच २, वा छ २, वा सात २ वा आठ २ गिनता था तब एक हि फल शेष बचता था। तब कहो उस के टोकरी में कितने फल थे?

यहां ४, ५, ६, ७ और ८ इन का लघुतमापवर्त्य ८४० है इस लिये ८४० + १ = ८४१ इस में ४, ५, ६, ७ और ८ इन का अलग २ भाग देने से अवश्य १ हि शेष बचेगा। इस लिये उस टोकरी में ८४१ फल थे।

अभ्यास के लिये और प्रश्न।

(१) ६५ और ६१ इन दो संख्याओं के महत्तमापवर्तन से इन का लघुतमापवर्त्य कितना गुना बड़ा होगा?

उत्तर। ३५ गुना बड़ा होगा।

(२) १३, १५, १७ और १६ इन चार संख्याओं से जितनी संख्या निःशेष होगी उन में सब से छोटी संख्या क्या है?

उत्तर, ६२६८५।

(३) कितनी एक गौ १० घर से समान निकलीं फिर नगर के चार मार्ग में समान चलीं फिर नदी में १५ स्थान पर समान होके जल पीया और ६ वृक्षों के नीचे समान बैठीं तब वे कितनीं गौ थीं?

उत्तर, १८०।

(४) एक वृत्ताकार क्षेत्र का परिधि ६० कोस का है उस क्षेत्र की सव्य प्रदक्षिणा करने के लिये अ, क, ग और घ ये चार मनुष्य एक हि काल में एक स्थान से चले वे क्रम से एक घडी में ३, ४, ५ और ६ कोस चलते थे। तब वे जिस स्थान से प्रदक्षिणा करने लगे उसी स्थान में फिर सब कितने काल में एकत्र होंगे और उस काल में हर एक कीं कितनी प्रदक्षिणा होंगी?

उत्तर, ६० घड़ी में एकत्र होंगे और अ, की ३, क, की ४, ग, की ५ और घ, की ६ प्रदक्षिणा होंगी।

(५) वह संख्या क्या है जिस में ५, ६, ७, ८ और ६ इन संख्याओं का अलग २ भाग देने से ३ शेष रहता है?

उत्तर, २५२३।

(६) जिस संख्या में ६, ५, ४ और ३ इन का अलग २ भाग देने से क्रम से ४, ३, २ और १ शेष रहता है वह संख्या क्या है?

उत्तर, ५८।